



گزینه ۲

۱

$$f(x) = x \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{3(x+2) - (3x+1)}{(x+2)^2} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \times x$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{5x}{3(x+2)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \xrightarrow{x=-3} 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه ۱

۲

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right] (x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

$$2 < 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}} \quad (I)$$

$$5 > 4 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{x}{4}\right] (x^2 - 9x), \quad \left[\frac{5}{4}\right] = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$\xrightarrow{(II)} f'(5) = 1$$

پس $f'(2) - f'(5) = \frac{1}{4}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ برابر $f'(1)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \times \frac{4(x+3) - (4x+5)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4+5}{1+3}}} \times \frac{4(1+3) - (4+5)}{(1+3)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{7}{16} = \frac{7}{48}$$

گزینه ۲

گام اول

می‌دانیم $g \circ f(x) = g(f(x))$ و $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنه تعریف تابع $g \circ f(x)$ به صورت زیر است:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، ابتدا ضابطه $g \circ f(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطه $g(f(x))$ کافی است در ضابطه $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-1, 1), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{g \circ f} = (-1, 1)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow y = g \circ f(x) = x \Rightarrow f'(x) g'(f(x)) = y' = 1 \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{ax} = \frac{3x}{ax} = \frac{3}{a}$$

$$\frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}}}{1} = \frac{2 - \frac{10}{2 \times 4}}{1} = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

با اطلاعات مسئله داریم:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1 \quad (1)$$

از طرفین رابطه (۱) مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

$$P'(-2) = -2Q(-2) + 3 = -2(3) + 3 = -3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

طول نقطه برخورد f و f^{-1} را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{x} + 2 = x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

پس شیب خط مماس بر f در A برابر $\frac{1}{4}$ و در نتیجه شیب خط مماس بر f^{-1} برابر ۴ است.

$$\tan \alpha = \left| \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 1} \right| = \frac{15}{8}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{15}{4}}{1 + \frac{225}{64}} = \frac{15 \times 16}{225 + 64} = \frac{240}{289}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & ; x \leq 2 \\ 2ax + 5 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + 5 & ; x \leq 2 \\ 2a & ; x > 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow a = \frac{-5}{2}$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow 4a + 10 + b = 4a + 5 \Rightarrow b = -5$$

$$a + b = \frac{-5}{2} - 5 = \frac{-15}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{-x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = -4\sqrt{5}$$

در حالتی که f' وجود داشته باشد، داریم:

$$f(x) = (x[x])^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x[x])^2 [x]$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ داریم:

$$x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^-} = 2^+$$

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ داریم:

$$y'\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) = (-4\sqrt{5})f'(2^+) = (-4\sqrt{5}) \times 3(2)^2 \times 2 = (-48\sqrt{5})(2)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

راه حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow y\sqrt{x} - y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y + 1}{y - 1}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1}\right)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 2\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \times \frac{-2}{(x - 1)^3} \Rightarrow g'(2) = 2 \times 3 \times \frac{-2}{1} = -12$$

راه حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$2 = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow x = 9$$

پس نقطه $A(9, 2)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x) = \frac{-2}{(\sqrt{x} - 1)^3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{-2}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{-1}{12}$$

پس شیب خط مماس بر f^{-1} در نقطه $A'(2, 9)$ برابر -12 است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$f(x) = \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{(2 - 2x)(3x + 5) - 3(2x - x^2)}{(3x + 5)^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{2}{3} \left(\frac{-4 - 4}{-6 + 5}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{6(-1) - 3(-4 - 4)}{(-6 + 5)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} (8)^{-\frac{1}{3}} (-6 + 24) = \frac{2 \times 18}{3\sqrt[3]{8}} = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

الف) برای این که تابع در $x = 3$ پیوسته باشد، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

ب) وقتی $x \rightarrow 3^+$ حاصل حد $\frac{0}{0}$ شده و مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال حاصل حد راست تابع را در نقطه $x = 3$ به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax - 3a - \frac{3}{\lambda} = 3a - 3a - \frac{3}{\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$

$$f(3) = 3a - 3a - \frac{3}{\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = -\frac{1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$$

مشاهده می‌شود فارغ از اینکه مقدار a چند باشد، حاصل حد راست، حد چپ و مقدار تابع در نقطه $x = 3$ برابر است. پس به ازای هر مقدار a ، تابع $f(x)$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است.

گزینه ۳

باتوجه به عبارت $\frac{3}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h}$ و $f(2) = 9$ و $f'(2) = \frac{3}{2}$ می‌شود.

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + x \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \Rightarrow g'(2) = \sqrt{f(2)} + 2 \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}$$

$$\Rightarrow g'(2) = \sqrt{9} + 2 \times \frac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

باتوجه به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $h = 0$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(-2 + h) + 3 = 0 \xrightarrow{h=0} f(-2) = -3$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) + 3}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(x^y f(x))' = y x f(x) + x^y f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-2} -4f(-2) + 4f'(-2) = -4(-3) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 12 + 2 = 14$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 1$ تا $x = 1/44$ را با استفاده از رابطه $\frac{f(1/44) - f(1)}{0/44}$ به دست می‌آوریم.

ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 1$ باید ضابطه مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(1)$ را محاسبه کنیم. اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44) - f(1)}{0/44} = \frac{\frac{0/44}{\sqrt{1/44}} - 0}{0/44} = \frac{1}{\sqrt{1/44}} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

گام اول

الف) معادله خط گذرا از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطه $x = 3$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادله خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(-1, 3)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB} (x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2} (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(3) = y(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow f(3) = 1$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول $f'(3) = \frac{-1}{2}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده شده را به دست می‌آوریم.
روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} - \frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} - (f(x) + 5) \frac{(f(x) - f(3))}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} - (f(x) + 5)(f'(3)) = - (f(3) + 5)f'(3) = -6 \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \frac{f^2(3) + 4f(3) - 5}{3 - 3} = \frac{1 + 4 - 5}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f'(x)f(x) + 4f'(x)}{-1} = \frac{2f'(3)f(3) + 4f'(3)}{-1} \\ &= \frac{2 \left(-\frac{1}{2}\right)(1) + 4 \left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{-1 - 2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \end{aligned}$$

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
 ب) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_0, y_0) عبور می‌کند، به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ج) در محل برخورد یک منحنی با محور عرض‌ها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

$$y = \frac{x^2}{x-1} \xrightarrow{x=2} y(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(2) = \frac{2^2 - (2 \times 2)}{(2-1)^2} = \frac{4-4}{1} = 0$$

بنابراین معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $(2, 4)$ به صورت زیر است:

$$y - y(2) = y'(2)(x - 2) \xrightarrow[y=2]{y'(2)=0} y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$$

پس محل برخورد خط مماس بر منحنی در نقطه $(2, 4)$ یعنی خط $y = 4$ با محور y ‌ها دارای عرض ۴ است.

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعه $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > 1$ و $x < 1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط، مقادیر a و b را می‌یابیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx = a + b \\ f(1) &= \frac{2 \times 1}{1} = 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)} a + b = 2 \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{3}{2}} & ; x > 1 \\ 2ax + b & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= -(1)^{-\frac{3}{2}} = -1 \\ f'_-(1) &= 2a + b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{f'_+(1) = f'_-(1)} 2a + b = -1 \quad (II)$$

دو رابطه I و II را به صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{(-)} -a = 3 \Rightarrow a = -3 \xrightarrow{(I)} -3 + b = 2 \Rightarrow b = 5$$

وقتی $x \rightarrow 2$ ، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \rightarrow 2$ ، مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = 2$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + b = 0 \quad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{2 \times 2}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با استفاده از رابطه (I) مقدار b برابر است با:

$$2 \left(\frac{1}{2} \right) + b = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

برای سهولت در مشتق‌گیری به جای $\sqrt[3]{x}$ ، عبارت $x^{\frac{1}{3}}$ را قرار می‌دهیم. ضابطه مشتق دوم یا همان y'' را تعیین کرده و حاصل $y''y^5$ را به دست می‌آوریم.

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y'' = \left(\frac{1}{3} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\Rightarrow y''y^5 = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} (\sqrt[3]{x})^5 = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} \times \sqrt[3]{x^5} = -\frac{2}{9}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

راه حل اول:

$$f'_-(\varpi) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\varpi + h) - f(\varpi)}{h}$$

تابع f در $\varpi = x$ پیوستگی چپ ندارد و در نتیجه $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\varpi + h) - f(\varpi)}{h}$ وجود ندارد.

راه حل دوم:

بدون توجه به تعریف مشتق، حد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\varpi + h) - f(\varpi)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{(\varpi + h)^2}{|1 - (\varpi + h)|} [\varpi + h] - \frac{27}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{(\varpi + h)^2}{|-2 - h|} \times 2 - \frac{27}{2}}{h} = \frac{\frac{9}{2} \times 2 - \frac{27}{2}}{0^-} = \frac{-\frac{9}{2}}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

هنگامی که $x = 1$ باشد، مخرج کسر صفر می‌شود؛ در نتیجه باید صورت کسر در این حالت صفر شود تا حالت $\frac{0}{0}$ ایجاد شود که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیر صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x^2 - 1} = \frac{\varpi}{2} \Rightarrow \sqrt{a + b} - 2 = 0 \Rightarrow a + b = 4$$

در اینجا برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{HOP} : \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax + b}}}{2x} = \frac{\varpi}{2} \Rightarrow \frac{a}{4\sqrt{a + b}} = \frac{\varpi}{2} \xrightarrow{a + b = 4} a = 12 \Rightarrow b = -8$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

از آنجا که این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است. داریم:

$$y_1 = x\sqrt{x} \Rightarrow y'_1 = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$y_2 = x^2 + ax + b \Rightarrow y'_2 = 2x + a$$

$$y'_1(4) = y'_2(4) \Rightarrow 2 + \frac{4}{2} = 8 + a \Rightarrow a = -5$$

و نیز داریم:

$$y_1(4) = y_2(4) \Rightarrow 8 = 16 - 5(4) + b \Rightarrow 8 = -4 + b \Rightarrow b = 12$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\begin{cases} f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4 \\ g(2) = 4a + 2b \end{cases} \xrightarrow{f(2)=g(2)} 4a + 2b = 4 \quad (1)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -3 \\ g'(x) = 2ax + b \Rightarrow g'(2) = 4a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(2)=g'(2)} 4a + b = -3 \quad (2)$$

باتوجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 4a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow b = 7$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

اگر $y = f(u)$ باشد به طوری که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u' f'(u)$$

گام دوم

باتوجه به گام اول و با فرض اینکه $u = x + \sqrt{1+x^2}$ است، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u}$$

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = (x + \sqrt{1+x^2})' f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

گام اول

می‌دانیم $g \circ f(x) = g(f(x))$ و $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ است.

گام دوم

باتوجه به گام اول و فرض‌های صورت سؤال، مشتق تابع $y = f \circ g \circ h(x)$ را در نقطه $x = 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x)))$$

$$\Rightarrow y' = (g(h(x)))' \times f'(g(h(x))) = h'(x) \times g'(h(x)) \times f'(g(h(x)))$$

$$\xrightarrow{x=0} y'(0) = h'(0) \times g'(h(0)) \times f'(g(h(0)))$$

$$\xrightarrow{h(0)=1, \quad h'(0)=1} y'(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \times g'(1) f'(g(1))$$

$$\xrightarrow{-g(1)=1, \quad -g'(1)=1} y'(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \times (-1) f'(-1)$$

$$\xrightarrow{f'(-1)=1} y'(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} (-1) (1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
 ب) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

فرض می‌کنیم نقطه $A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)$ بر روی منحنی قرار داشته باشد. با محاسبه مشتق تابع در این نقطه، معادله خط مماس را تشکیل می‌دهیم.

$$y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)} y'_A = \frac{2(\alpha+1) - (2\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2\alpha+2-2\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

$$y - y_A = y'_A (x - x_A) \Rightarrow y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2} (x - \alpha)$$

خط مماس از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد و بنابراین مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-1, y=0} 0 - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2} (-1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = -\frac{3(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} \Rightarrow \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{\alpha+1}$$

دقت کنید که نقطه $x = -1$ عضو دامنه تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ نیست و تابع در این نقطه تعریف نشده است بنابراین $\alpha = -1$ است (زیرا نقطه $A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)$ روی منحنی تابع قرار دارد) پس می‌توان عبارت $\alpha+1$ را در کسر فوق ساده کرد. داریم:

$$2\alpha-1=3 \Rightarrow 2\alpha=4 \Rightarrow \alpha=2$$

گام اول

الف) تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که تابع $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.
 ب) هرکدام از دو تابع $[x + \frac{1}{3}]$ و $[x]$ روی بازه $(0, 3)$ مشتق‌ناپذیر شوند، کل تابع $f(x) = [x + \frac{1}{3}] + [x]$ مشتق‌ناپذیر خواهد شد.

گام دوم

روش اول:

بررسی می‌کنیم در چه نقاطی از بازه $(0, 3)$ ، عبارت درون جزء صحیح برابر یک عدد صحیح می‌شود:

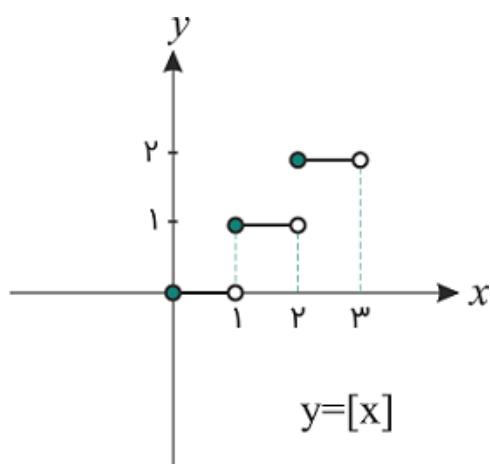
$$۱) \quad y = [x] : \quad x \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0, 3) \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$$۲) \quad y = \left[x + \frac{1}{3}\right] : \quad x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0, 3) \Rightarrow x = \frac{2}{3}, x = \frac{5}{3}, x = \frac{8}{3}$$

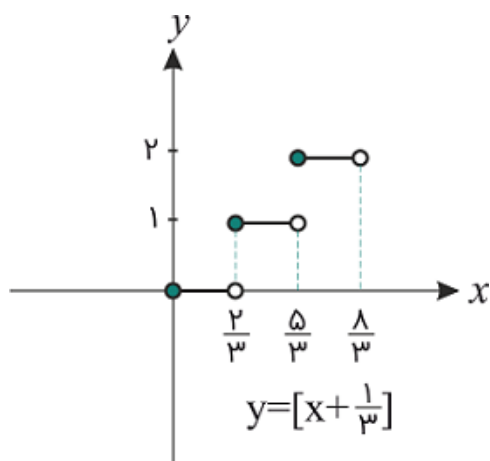
بنابراین تابع $f(x)$ در مجموع در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم:

با رسم نمودار توابع $y = [x]$ و $y = \left[x + \frac{1}{3}\right]$ ، نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



نقاط ناپیوستگی: $x = 1, x = 2$



نقاط ناپیوستگی: $x = \frac{۲}{۳}$, $x = \frac{۵}{۳}$, $x = \frac{۸}{۳}$
 بنابراین تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{g(x) - g(۲)}{x - ۲} = g'(۲)$$

ب) می‌دانیم:

$$(g \circ f)'(۱) = f'(۱) g'(f(۱))$$

گام دوم

با استفاده از ضابطهٔ تابع $f(x)$ ، مقادیر $f(۱)$ و $f'(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{۵ - x^۲} \Rightarrow f(۱) = \sqrt{۵ - ۱} = ۲$$

$$f'(x) = \frac{-۲x}{۲\sqrt{۵ - x^۲}} = \frac{-x}{\sqrt{۵ - x^۲}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{-۱}{\sqrt{۵ - ۱}} = \frac{-۱}{\sqrt{۴}} = -\frac{۱}{۲}$$

پس مقدار $(g \circ f)'(۱)$ برابر است با:

$$(g \circ f)'(۱) = f'(۱) g'(f(۱)) \xrightarrow{f(۱)=۲} (g \circ f)'(۱) = f'(۱) \times g'(۲) = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} = -\frac{۳}{۴}$$

گام اول

الف) فاصله نقطه $M(x, y)$ از مبدأ مختصات از رابطه $T = \sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید.
 ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطه T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y = \sqrt{x + 8}$ را جایگزین می‌کنیم تا T بر حسب متغیر x به دست آید.

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{y=\sqrt{x+8}} T = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+8})^2} = \sqrt{x^2 + x + 8}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x = 7$ حساب می‌کنیم:

$$T' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 8}}$$

$$\Rightarrow T'(7) = \frac{2(7) + 1}{2\sqrt{7^2 + 7 + 8}} = \frac{14 + 1}{2\sqrt{49 + 7 + 8}} = \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{2 \times 8} = \frac{15}{16}$$

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع بر حسب x باشند و داشته باشیم $f(x) = u \times v$ ، آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

گام دوم

باتوجه به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطه مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = (x - 2) \sqrt[3]{x^2} = (x - 2) x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 1 \times x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x - 2) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x - 2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-1)$ است، پس داریم:

$$f'(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} + \frac{2(-1 - 2)}{3\sqrt[3]{-1}} = 1 + \frac{2(-3)}{3(-1)} = 1 + 2 = 3$$

ابتدا ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^5 \Rightarrow f'(x) = 1 + 5g'(x)(g(x))^4$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1 + 5g'(0)(g(0))^4$$

باتوجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(0)=g(0)=1} 1 = 1 + 5g'(0)(1)^4 \Rightarrow 5g'(0) = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$$

در محاسبه ضابطه تابع $f''(x)$ با عبارت $g'(x)(g(x))^4$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(0) = 0$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفرشونده تابع $f'(x)$ در نقطه $x = 0$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(0) = 0 + 5g''(0)(g(0))^4$$

$$\xrightarrow[g(0)=1]{x=0} f''(0) = 5g''(0)(1)^4 = 5g''(0)$$

گام اول

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

ب) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

گام دوم

آهنگ لحظه‌ای در نقطه $a + \frac{h}{2}$ یعنی محاسبه $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$ پس ابتدا ضابطه $f'(x)$ را تعیین و سپس $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \Rightarrow f'(x) = 6x + 4$$

$$a + \frac{h}{2} \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'\left(a + \frac{h}{2}\right) = 6\left(a + \frac{h}{2}\right) + 4 = 6a + 3h + 4$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از a تا $a + h$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{[3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2] - (3a^2 + 4a - 2)}{h} \\ &= \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + 4a + 4h - 2 - 3a^2 - 4a + 2}{h} = \frac{6ah + 3h^2 + 4h}{h} = 6a + 3h + 4 \end{aligned}$$

مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای در موارد خواسته شده برابر شد، پس تفاضل آن‌ها برابر صفر است.

$$x = 3 \text{ در آهنگ لحظه‌ای} = f'(3)$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(3) = 27 \quad (1)$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{f(3/1) - f(3)}{0/1} = \frac{(3/1)^3 - 3^3}{0/1} = 27/91 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} 27/91 - 27 = 0/91$$

گام اول

الف) $f'(1)$ موجود است؛ یعنی در $x = 1$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر.
 ب) تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

ج) تابع در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$$f'_+(1) = f'_-(1)$$

گام دوم

باتوجه به اینکه $1 - \sqrt{2} < 1$ است، برای محاسبه $f(1 - \sqrt{2})$ باید از ضابطه مربوط به x های کوچکتر از ۱ استفاده کنیم؛ بنابراین لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری، مقادیر a و b را بیابیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{x} \right) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax + b = a + b + 1 \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)} a + b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = -1 \quad (I)$$

برای بررسی شرط مشتق‌پذیری، ابتدا ضابطه مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطه $x = 1$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} & ; x > 1 \\ 2x + a & ; x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 1 + 1 = 2 + a \Rightarrow a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

با جایگذاری در رابطه I مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$a + b = -1 \Rightarrow 0 + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

بنابراین ضابطه تابع به ازای $x < 1$ به صورت زیر می‌شود:

$$x < 1 : f(x) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

گام اول

مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ موجود است هرگاه:

اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند.

گام دوم

بررسی شرط پیوستگی در نقطه $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \sqrt[3]{(2+6)^2} = a + b \Rightarrow \sqrt[3]{8^2} = a + b \Rightarrow a + b = 4 \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری در نقطه $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (2x+6)^{\frac{2}{3}} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \times \frac{2}{3} \times (2x+6)^{-\frac{1}{3}} & ; x > 1 \\ a & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2x+6}} & ; x > 1 \\ a & ; x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2+6}} = a \Rightarrow a = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

با جایگذاری در رابطه (I) داریم:

$$a + b = 4 \xrightarrow{a=\frac{2}{3}} \frac{2}{3} + b = 4 \Rightarrow b = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

$f'(\alpha)$ و $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ را محاسبه و باهم برابر قرار می‌دهیم، سپس مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_1 = 2 \text{ تا } x_2 = 5 &= \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{5}{5-1} - \frac{2}{2-1}}{3} = \frac{\frac{5}{4} - 2}{3} = \frac{\frac{5-8}{4}}{3} = \frac{-\frac{3}{4}}{3} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$x = \alpha \text{ در آهنگ لحظه‌ای} = f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow -\frac{1}{(\alpha-1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha-1=2 \Rightarrow \alpha=3 \\ \alpha-1=-2 \Rightarrow \alpha=-1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.
 ب) مشتق تابع $\text{gof}(x)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = \text{gof}(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع gof را در نقطه $x = 0$ به طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \\ g(x) = (\frac{3}{4} + a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{4} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\text{gof})'_+(0) = f'_+(0)g'_+(f(0)) = 4(\frac{3}{4} + a) = 3 + 4a$$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \\ g(x) = (\frac{3}{4} - a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{4} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\text{gof})'_-(0) = f'_-(0)g'_-(f(0)) = 2(\frac{3}{4} - a) = \frac{3}{2} - 2a$$

باتوجه به قسمت (الف) از گام اول، تابع gof در $x = 0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(\text{gof})'_+(0) = (\text{gof})'_-(0) \Rightarrow 3 + 4a = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

برای آنکه نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول مماس باشد، باید معادله تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -4 \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطه برخورد برابر ۱ است. از معادله کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y' = 4x + m + 1 \xrightarrow{y'=1} 1 = 4x + m + 1 \Rightarrow x = -\frac{m}{4}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیه اول مماس می‌باشد، بنابراین $x > 0$ لذا $m = -4$ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

$$\text{آهنگ متوسط تابع} = \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{2/25} = \frac{2/5 - 2}{2/25} = \frac{0/5}{2/25} = \frac{1}{4/5}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4/5} = \frac{40 - 45}{180} = \frac{-5}{180} = \frac{-1}{36}$$

بنابراین آهنگ متوسط به مقدار $\frac{1}{36}$ از آهنگ لحظه‌ای کمتر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

$f'_+(\sqrt{2})$ مشتق راست تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt{2}$ و $f'_-(\sqrt{2})$ مشتق چپ تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt{2}$ است.

گام دوم

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه $\sqrt{2}$ بررسی می‌کنیم:

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - [2(\sqrt{2})^2](\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} x^3 - [2x^2]x = (\sqrt{2})^3 - \underbrace{[2(\sqrt{2}^+)^2]}_{4^+} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} x^3 - [2x^2]x = (\sqrt{2})^3 - \underbrace{[2(\sqrt{2}^-)^2]}_{4^-} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

بنابراین تابع از سمت چپ ناپیوسته است، در نتیجه مشتق چپ وجود ندارد. مشتق راست تابع را بدست می‌آوریم:

$$x \rightarrow \sqrt{2}^+ \Rightarrow x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow 2x^2 > 4 \Rightarrow [2x^2] = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 4x \Rightarrow f'_+(x) = 3x^2 - 4$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 4 = 3(2) - 4 = 6 - 4 = 2$$

در صورتی که خط بر منحنی مماس باشد، معادله تلاقی دو منحنی، ریشه مضاعف دارد:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{x^2 + a}{x - 2} \\ y &= -3x + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 + a}{x - 2} = -3x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + a = -3x^2 + \lambda x - 4 \Rightarrow 4x^2 - \lambda x + (a + 4) = 0$$

برای به دست آوردن ریشه مضاعف، $\Delta = 0$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-\lambda)^2 - 4(4)(a + 4) = 0 \Rightarrow 64 - 16a - 64 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4x - 1$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-x^2 + 4x - 1$ اتفاق می‌افتد.

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2, \quad f(2) = \frac{10}{3} \Rightarrow A\left(2, \frac{10}{3}\right)$$

$$m = f'(2) = -4 + 8 - 1 = 3 \quad \text{شیب خط مماس}$$

$$\text{عرض از مبدأ} \quad y - \frac{10}{3} = 3(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = \frac{10}{3} - 6 = \frac{-8}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

$$f(0) = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+a} - b}{x} = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{0+a} - b = 0 & (1) \\ \text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}}}{1} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = \pm 2 \xrightarrow{(1)} b = \pm 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازه } [0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{(\sqrt{9} + \frac{1}{5}) - (\sqrt{1} + \frac{1}{1})}{4 - 0} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10} = 0/3$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } f'(\frac{3}{4}) = \frac{1}{\frac{3}{4}} - \frac{1}{(\frac{5}{4})^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} - \frac{4}{25} = 0/5 - 0/16 = 0/34$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر متوسط} - \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = 0/34 - 0/3 = 0/04$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

خط $y = 5x + a$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ در نقطه‌ای مماس می‌شود که شیب خط مماس برابر با ۵ باشد.

$$y = 2x^2 - 3x + 6 \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = \text{مشتق} \Rightarrow 4x - 3 = 5 \Rightarrow x = 2$$

پس خط در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مماس است. به علاوه خط و تابع در این نقطه برخورد دارند. اگر $x = 2$ را در تابع قرار دهیم داریم:

$$y(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 - 6 + 6 = 8 \Rightarrow \text{نقطهٔ تماس } (2, 8)$$

نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس باید صدق کند:

$$y = 5x + a \xrightarrow{(2,8)} 8 = 5(2) + a \Rightarrow a = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.
ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند، به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ج) مختصات نقطهٔ تلاقی در هر دو معادله، صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه به قسمت "الف" و "ب" از گام اول، معادلهٔ خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y = x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(1) = 3 - 2 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y(1) = (1)^3 - (1)^2 = 1 - 1 = 0$$

$$y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = x - 1 \Rightarrow y = x - 1$$

سپس با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط $y = x - 1$ و معادلهٔ منحنی، مختصات نقطهٔ تلاقی را محاسبه می‌کنیم:

$$x - 1 = x^3 - x^2 \Rightarrow x - 1 = x^2(x - 1) \Rightarrow (x - 1)(1 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(1 - x)(1 + x) = 0 \xrightarrow{x \neq 1} 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

بنابراین $x_A = -1$ است و داریم:

$$y_A = (-1)^3 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$$

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -5 \\ f(1) = \frac{27}{9} = 3 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3 - (-5)}{1 - 0} = 1$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x-5)}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \text{ ق.ق} \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x = 2$ بر منحنی مماس است:

$$f(2) = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow (2, 1), m = 1$$

$$y - 1 = 1(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

تابع باید در $x = 2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a}{ax + b} = \frac{a}{2a + b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + 6x = -4 + 12 = 8 \Rightarrow \frac{a}{2a + b} = 8 \Rightarrow 2a + b = 2$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(ax + b)^2} & ; x > 2 \\ -2x + 6 & ; x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = \frac{-a}{(2a + b)^2} = \frac{-a}{2^2} = -\frac{a}{2} \\ f'_-(2) = -4 + 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4, \quad b = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$f(x) = \frac{|x| |x^2 - 2|}{x}$$

دامنه تابع f ، $\mathbb{R} - \{0\}$ است. تابع f در ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق یعنی $\pm\sqrt{2}$ مشتق ندارد. همچنین در ریشهٔ مخرج یعنی $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

دقت کنید که تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری روی دامنه دو نقطه و روی $\mathbb{R}$ سه نقطه است. منظور سؤال بررسی مشتق‌ناپذیری روی $\mathbb{R}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

چون خط $y = 3x - 5$ در $x = 2$ بر $g(x)$ مماس است، پس $g'(2) = 3$ و $A(2, 1) \in g$ خواهد بود.

از طرفی چون $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = \frac{2}{3}$ است، پس:

$$\frac{1}{2}f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x) f'(g(x)) \Rightarrow y'(2) = g'(2) f'(g(2))$$

$$\Rightarrow y'(2) = 3f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

حاصل $f'(\frac{1}{4})$ را می‌خواهیم:

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}} \frac{-\frac{1}{2} - 1(-\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{0 - \frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x - 18} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(10x - 18) \sqrt[3]{(3x+2)^2}}$$

$$= \frac{-1}{2(4)} = \frac{-1}{8}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

برای تعیین ضابطه تابع $f(f(x))$ ، کافی است در ضابطه $f(x)$ به جای متغیر x تابع $f(x)$ را جایگذاری کنیم:

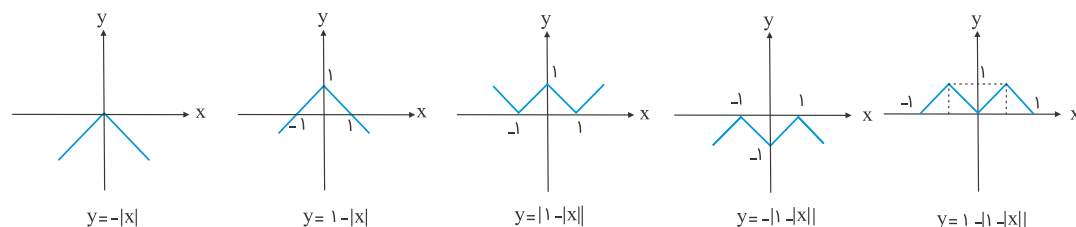
$$f(x) = 1 - |x| \Rightarrow f(f(x)) = 1 - |f(x)| = 1 - |1 - |x||$$

می‌دانیم تابع در ریشه‌های ساده عبارت درون قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است:

$$1) |x| : x = 0$$

$$2) |1 - |x|| : 1 - |x| = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

علاوه‌برآن، با رسم نمودار تابع نیز می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر را مشخص کرد:



بنابراین تابع $y = 1 - ||x| - 1|$ دارای سه نقطه مشتق‌ناپذیر $x = -1$ ، $x = 1$ ، $x = 0$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

توابع شامل قدر مطلق در ریشه‌های ساده عبارت درون قدر مطلق مشتق ندارند؛ بنابراین تابع $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در $x=0$ مشتق ندارد پس $\alpha=0$ است.

گام دوم

به ازای $x > 0$ و $x < 0$ ضابطه مشتق تابع $f(x)$ و مقادیر $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را تعیین می‌کنیم سپس حاصل عبارت $f'_+(0) - f'_-(0)$ را به دست می‌آوریم:

$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow f'_+(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow f'_-(0) = \frac{-1}{2\sqrt{1-0}} = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(0) - f'_-(0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ابتدا از ضوابط داده‌شده مشتق چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow f'_+(1) = -3$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'_-(1) = 2 + a$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow -3 = 2 + a \Rightarrow a = -5$$

چون تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین پیوسته نیز هست.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - 5 = (1)^2 - 5(1) + b \Rightarrow b = 2$$

گام اول

- الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
 ب) مختصات نقطه تماس در معادله خط مماس و معادله منحنی صدق می‌کند.
 ج) شیب خطی به معادله $y = ax + b$ برابر a است.

گام دوم

شیب خط $y = 2x - 5$ برابر ۲ است؛ بنابراین مشتق تابع به معادله $y = ax^2 + bx + 1$ در نقطه $x = 1$ نیز برابر ۲ می‌شود:

$$y = ax^2 + bx + 1 \Rightarrow y' = 2ax + b \xrightarrow{x=1} m_{\text{مماس}} = y'(1) = 2 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad (\text{I})$$

طبق قسمت ب از گام اول، به ازای $x = 1$ مقدار به دست آمده از معادله خط و منحنی برابر است، پس داریم:

$$y = 2x - 5 \Rightarrow y(1) = 2 - 5 = -3$$

$$y = ax^2 + bx + 1 \Rightarrow y(1) = a + b + 1 = -3 \Rightarrow a + b = -4 \quad (\text{II})$$

از دو معادله (I) و (II)، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ -a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 6$$