



گزینه ۳

۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) مشتق تابع $y = \sqrt{u}$ از رابطه $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ به دست می‌آید.

ب) مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

گام دوم

با استفاده از روابط گام اول، ابتدا $f'(x)$ و سپس $f'(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(2x+1) - 2(3x-1)}{(2x+1)^2 \cdot 2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}} = \frac{5}{(2x+1)^2 \cdot 2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{5}{(4+1)^2 \cdot 2\sqrt{\frac{6-1}{4+1}}} = \frac{5}{5^2 \cdot 2\sqrt{\frac{5}{5}}} = \frac{1}{10}$$

گزینه ۱

۲

حد داده شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x = 2$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x = 2$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$f'(x) = 3 \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^2 \times \left(\frac{-7}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} (2x-3)^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(2) = 12 \times \frac{-7}{2 \times \sqrt{\frac{2+2}{4-3}} (4-3)^2} = -21$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) دو خط موازی‌اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.
 ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m+2)y = mx \Rightarrow y = \left(\frac{m}{m+2}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m+2}\right)$ است. کافی است ضابطه $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2}$$

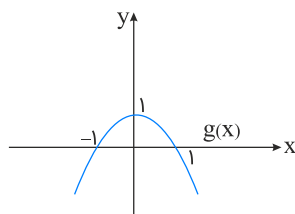
می‌دانیم $1 > \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} > -1$ همواره برقرار است بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m}{m+2} > -1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{m+m+2}{m+2} > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -1 \\ \frac{m}{m+2} < 1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{m-m-2}{m+2} < 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases}$$

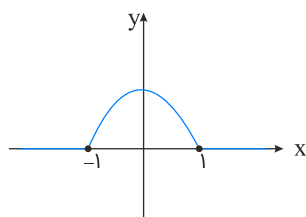
از اشتراک جواب‌های دو معادله فوق داریم: $m > -1$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \leq -1 \\ x & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 - x^2$$



$$g \circ f(x) = \begin{cases} g(-1) = 0 & ; x \leq -1 \\ 1 - x^2 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ g(1) = 0 & ; x > 1 \end{cases}$$

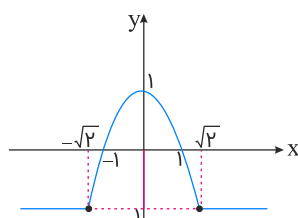


در $x = -1$ و $x = 1$ نقطه گوشه‌ای داریم و $g \circ f$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -1 & ; g(x) \leq -1 \\ g(x) & ; -1 \leq g(x) \leq 1 \\ 1 & ; g(x) > 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & ; x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } x \geq \sqrt{2} \\ g(x) & ; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$g(x) \leq -1 \Rightarrow 1 - x^2 \leq -1 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ \text{یا} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

در $x = \pm\sqrt{2}$ نقطه گوشه‌ای داریم و تابع مشتق‌پذیر نیست!



تابع P به صورت زیر است:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

P' به صورت زیر است:

$$P'(x) = 2ax + b$$

سؤال گفته اگر P را بر P' تقسیم کنیم، خارج قسمت $1 + \frac{x}{2}$ و باقی مانده -2 است. اتحاد تقسیم را می نویسیم:

$$\begin{aligned} P(x) &= P'(x) \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) + (-2) \Rightarrow ax^2 + bx + c = (2ax + b) \left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 \\ \Rightarrow ax^2 + bx + c &= ax^2 + \left(2a + \frac{b}{2}\right)x + (b - 2) \end{aligned}$$

ضرایب عبارات هم درجه را برابر قرار می دهیم:

$$x^2 \text{ ضرایب } \Rightarrow a = a$$

$$x \text{ ضرایب } \Rightarrow b = 2a + \frac{b}{2} \xrightarrow{\times 2} 2b = 4a + b \Rightarrow b = 4a$$

$$\text{جملات درجه صفر} \Rightarrow c = b - 2$$

a, b, c ، سه عدد طبیعی اند. چون می خواهیم کمترین مقدار $a + b + c$ را حساب کنیم، پس باید در رابطه $b = 4a$ ، $a = 1$ و $b = 4$ باشد، پس:

$$c = b - 2 = 4 - 2 = 2$$

در نتیجه:

$$\min(a + b + c) = 1 + 4 + 2 = 7$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = 3 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = -a = 3 \Rightarrow a = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} &= \frac{0}{0} \\ \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} &= \frac{-3}{-1 + \frac{1}{4}} = 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^r + bx + a - b & ; x \geq k \\ rax + b & ; x < k \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k) \Rightarrow ak^r + bk + a - b = rak + b$$

$$\Rightarrow ak^r + (b - ra)k + a - rb = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} rax + b & ; x \geq k \\ ra & ; x < k \end{cases}$$

$$f'_+(k) = f'_-(k) \Rightarrow rak + b = ra \quad (2)$$

$$(1), (2) : ak^r + (ra - rak - ra)k + a - r(ra - rak) = 0$$

$$\Rightarrow ak^r - rak^r + a - ra + rak = 0$$

$$\Rightarrow -ak^r + rak - ra = 0 \Rightarrow -k^r + rk - r = 0 \Rightarrow k = 1, r$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

می‌دانیم: $(f \circ g(x))' = g'(x) f'(g(x))$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{-3x}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^3}} = \frac{-3x}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^3}}$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{-3 \times \frac{3}{\sqrt{\lambda}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{9}{\lambda} - 1\right)^3}} = \frac{\frac{-9}{\sqrt{\lambda}}}{3 \times \frac{1}{16}} = \frac{-9 \times 16}{3\sqrt{\lambda}} = \frac{-16}{\sqrt{\lambda}} = -8\sqrt{2}$$

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{\lambda} - 1}} = 2$$

حال باید $f'(2)$ را حساب کنیم. در همسایگی $x = 2$ حاصل برکت ۴ می‌شود.

$$f(x) = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$(f \circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right) = -8\sqrt{2} \times 64 = (-128\sqrt{2}) \times 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x)'(x^2 - x)^3 - ((x^2 - x)^3)'(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^6}$$

$$= \frac{(2x + 2)(x^2 - x)^3 - (3(x^2 - x)^2)(2x)(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^6}$$

$$f'(2) = \frac{6 \times 1 - 3 \times 3 \times 4 \times 1}{\cancel{8}} = -\frac{15}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{4}{5}(4x + |x|) - \frac{1}{5}|4x + |x||$$

$$\text{اگر } x \geq 0 \Rightarrow (fog)(x) = \frac{4}{5}(5x) - \frac{1}{5}(5x) = 4x - x = 3x$$

$$\text{اگر } x < 0 \Rightarrow fog(x) = \frac{4}{5}(4x - x) - \frac{1}{5}\underbrace{|4x - x|}_{3x}$$

$$= \frac{12}{5}x - \frac{1}{5}(-3x) = \frac{15}{5}x = 3x$$

بنابراین $(fog)(x) = 3x$ ، پس:

$$(fog)'(x) = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

باتوجه به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x = ۴$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(x) + ۷ = ۰ \xrightarrow{x=۴} f(۴) = -۷$$

تابع f در $x = ۴$ مشتق پذیر است؛ بنابراین می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow ۴} \frac{f(x) + ۷}{x - ۴} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow f'(۴) = -\frac{۳}{۲}, f(۴) = -۷$$

گام دوم

$$\left(\frac{f(۲x)}{x}\right)' = \frac{۲f'(۲x)x - f(۲x)}{x^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۲} \frac{۲f'(۴) \times ۲ - f(۴)}{۴} = \frac{۲(-\frac{۳}{۲})(۲) - (-۷)}{۴}$$

$$= \frac{-۶ + ۷}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) منظور از نمو متغیر همان Δx است، پس داریم: $\Delta x = 0/21$

ج) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$x_2 = 1/21 \text{ تا } x_1 = 1 \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1/21) - f(1)}{1/21 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{1/21} - \sqrt{1}}{0/21} = \frac{1/1 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{21}} = \frac{1}{21}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 1$ ، ابتدا باید ضابطه مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$x = 1 \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع} = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(1) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{21} = \frac{21 - 20}{42} = \frac{1}{42}$$

$$y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$$

آهنگ متوسط در بازه $[5, 6]$ برابر است با:

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36 + 24} - \sqrt{21 - 25 + 20}}{1} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{16}}{1} = -1$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y' = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{2(-x + 2)}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\begin{aligned} \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x} &= -1 \Rightarrow x - 2 = \sqrt{21 - x^2} + 4x \quad (*) \\ \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 - 4x + 4 &= 21 - x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = 2 \pm \frac{5}{2}\sqrt{2} \xrightarrow{x \geq 2} x = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (*) \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

$$f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}}$$

حال $f(4)$ و $f'(4)$ را به دست آورده و معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{5 \times 4 - 4}{\sqrt{4}} = \frac{16}{2} = 8 \\ f'(x) &= \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x - 4)}{x} \Rightarrow f'(4) = \frac{10 - \frac{1}{2}(16)}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

معادله خط مماس:

$$\begin{aligned} y - f(4) &= f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \\ \xrightarrow[\text{عرض از مبدأ}]{x=0} y - 8 &= \frac{3}{2}(-4) \Rightarrow y - 8 = -6 \Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر است، هرگاه:

(۱) در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

(۲) مشتق چپ و راست در نقطه $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \sqrt{5 - 2x} = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(-\frac{1}{2}x^2 + bx + c\right) = -\frac{1}{2}(-2)^2 + b(-2) + c = -2 - 2b + c$$

$$f(-2) = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \Rightarrow -2b + c = 5 \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-2) = f'_+(-2)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} \Rightarrow f'_-(-2) = \frac{-2}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-2) = 2 + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3} \xrightarrow{(*)} -2\left(-\frac{7}{3}\right) + c = 5$$

$$\Rightarrow c = 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$$

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است در صورتی که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم:

$$f'_+(0) = f'_-(0)$$

ب) مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است در صورتی که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم:

$$f''_+(0) = f''_-(0)$$

گام دوم

ابتدا ضابطه معکوس تابع $f(x)$ را برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $(f^{-1})'(x)$ و $(f^{-1})''(x)$ در نقطه $x = 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2 \text{ (دو طرف مثبت)}} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} ; x \geq 0$$

$$x < 0, y < 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow y = -\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2 \text{ (دو طرف منفی)}} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{2}} ; x < 0$$

پس ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & ; x \geq 0 \\ -x^{\frac{1}{2}} & ; x < 0 \end{cases}$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 0$$

همچنین داریم:

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & ; x > 0 \\ -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (f^{-1})'_+(0) = (f^{-1})'_-(0) = 0$$

پس تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

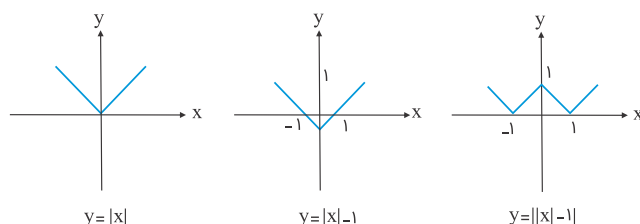
$$(f^{-1})''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & ; x > 0 \\ \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (f^{-1})''_+(0) &= -\frac{1}{4} \\ (f^{-1})''_-(0) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f^{-1})''_+(0) \neq (f^{-1})''_-(0)$$

بنابراین تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ مشتق دوم ندارد.

روش اول: رسم نمودار تابع

یکی از راه‌های تشخیص نقاط مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار توابع است. دقت کنید که نقاط زاویه‌دار، بازگشتی، دارای مماس قائم و ... در نمودار تابع، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع محسوب می‌شوند.



باتوجه به نمودار، سه نقطه به طول‌های $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ ، نقاط زاویه‌دار بوده و تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدر مطلق

تابع در ریشه‌های ساده عبارت داخل قدر مطلق نیز مشتق‌ناپذیر است. این تابع دو عبارت قدر مطلق دارد؛ یکی $|x|$ و دیگری $||x| - 1|$. ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$۱) |x| : x = 0$$

$$۲) ||x| - 1| : |x| - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تابع در سه نقطه $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ مشتق‌ناپذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم مشتق تابع $y = u^n$ که u تابعی بر حسب x است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y' = nu'u^{n-1}$$

گام دوم

با استفاده از گام اول مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2} \right)^2 \Rightarrow y = \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}} \right)^2 \\ \Rightarrow y' &= 2 \times \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \right) \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}} \right) \Rightarrow y' = 2 \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}} \right) \\ \xrightarrow{x=-8} y' &= 2 \left(-\frac{16}{64} - \frac{2}{3 \times (-2)} \right) \left(\frac{16}{-8} - 4 \right) = 2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) (-2 - 4) = 2 \left(\frac{1}{12} \right) (-6) = -\frac{12}{12} = -1 \end{aligned}$$

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است.
 ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad ; \quad 0 \in D_f$$

ج) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی $f'_-(0) = f'_+(0)$.

گام دوم

چون $x^2 \geq 0$ همواره برقرار است پس $D_f = \mathbb{R}$.
 اکنون ضابطه تابع را به ازای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می کنیم:

$$y = x\sqrt{x^2} = x|x| = \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x^2 \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x^2 \end{cases}$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول، شرط پیوستگی تابع را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x = 0$ پیوسته است.

باتوجه به قسمت ج از گام اول، شرط مشتق پذیری تابع را بررسی می کنیم:

$$y' = \begin{cases} 2x & ; \quad x > 0 \\ -2x & ; \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_-(0) = y'_+(0) = 0$$

پس تابع در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است.

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

ب) اگر $y = f(u)$ باشد به طوری که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u' f'(u)$$

گام دوم

مشتق تابع $f(\sqrt{|x| + 3})$ در همسایگی نقطه $x = -1$ محاسبه می شود بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=-1} |x| = -x \Rightarrow f(\sqrt{|x| + 3}) = f(\sqrt{3 - x})$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول می توان چنین نوشت:

$$y = f(\sqrt{3 - x}) \Rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{3 - x}} f'(\sqrt{3 - x})$$

$$\Rightarrow y'(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{3+1}} f'(\sqrt{3+1}) = \frac{-1}{2 \times 2} f'(2)$$

$$\xrightarrow{f'(2)=-\frac{1}{4}} y'(-1) = \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

گام اول

الف) نکته: در توابع دارای عبارت قدر مطلق، ریشه ساده عبارت درون قدر مطلق نقطه گوشه‌ای (زاویه دار) یا مشتق ناپذیر تابع است؛ بنابراین در تابع $f(x) = |x|(x + a)$ نقطه گوشه‌ای (زاویه دار) تابع، نقطه $x = 0$ است.

ب) شیب مماس راست در نقطه $x = 0$ برابر $f'_+(0)$ و شیب مماس چپ در نقطه $x = 0$ برابر $f'_-(0)$ است.

ج) مماس چپ و راست در نقطه $x = 0$ بر هم عمودند پس داریم: $f'_-(0) \cdot f'_+(0) = -1$

گام دوم

$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = x(x + a) = x^2 + ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'_+(0) = 2(0) + a = 0 + a = a$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)(x + a) = -x^2 - ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x - a \Rightarrow f'_-(0) = -2(0) - a = 0 - a = -a$$

$$f'_+(0) f'_-(0) = -1 \Rightarrow a(-a) = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

گام اول

می‌دانیم: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u = xf(x)$ و باتوجه به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x = 2$ محاسبه می‌کنیم.

$$u = xf(x) \Rightarrow u' = f(x) + xf'(x)$$

$$y = f(xf(x)) \Rightarrow y' = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x))$$

اکنون ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{xf(x)+2}} \right) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}x - x\sqrt{x+2} + 2}} \right) \\ \Rightarrow y'(2) &= \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{3-4+2}} \right) = (-1) \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید همواره نامنفی باشد.
 ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.
 ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

گام دوم

ابتدا دامنه تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته است (باتوجه به اینکه گزینه "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطه $x = 0$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکننده صورت و مخرج حذف شود:

$$\begin{aligned} f'_{-}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{\sqrt{1 - 1 + x^2}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{\sqrt{x^2}}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{|x|}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \end{aligned}$$

چون داریم:

$$x \rightarrow 0^{-} \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

بنابراین:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{-x}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 0}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

همان طوری که مشاهده می‌کنید از میان گزینه‌ها، تابع تنها در بازه $(-\infty, -1)$ برابر تابع ثابت $f(x) = -1$ است، در نتیجه روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گزینه ۲

۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

باتوجه به تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x = 5 \text{ تا } x = 9 &= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{9^2 + 144} - \sqrt{5^2 + 144}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{81 + 144} - \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

گزینه ۴

۲۶

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[0, 2]$:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع، همان مشتق است:

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{4x+1} + \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2) \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{19}{4}$$

تفاضل مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$5 - \frac{19}{4} = \frac{1}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر است، پس بایستی در $x = 2$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و راست تابع در $x = 2$ برابر باشند.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 + 2a + b = |4 - 4| \Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 + 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b = -2 \quad (1)$$

تابع f را در همسایگی چپ $x = 2$ (به دلیل وجود قدرمطلق) تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

X				
$X^Y - YX$	+	0	-	0

بنابراین باتوجه به جدول تعیین علامت اگر $0 < x < 2$ باشد، $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x < 0 \\ -x^2 + 2x & ; 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & ; x < 0 \\ -2x + 2 & ; 0 < x < 2 \\ x + a & ; x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 2 + a = -2(2) + 2 \Rightarrow a = -4$$

$$(1) \xrightarrow{a=-4} -4 + b = -2 \Rightarrow b = 6$$

$$\Rightarrow a + b = 2$$

فرض دوم مسئله، تعریف مشتق تابع $f(x)$ در $x = ۲$ است:

$$\lim_{x \rightarrow ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow f'(۲) = \frac{۴}{۳}$$

$$g(۱) = ۱ + \sqrt{۱} = ۲$$

طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$(fog)'(۱) = g'(۱) \times f'(g(۱)) = g'(۱) \times f'(۲) = \frac{۴}{۳} g'(۱)$$

ازطرفی:

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = ۱ + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=۱} g'(۱) = ۱ + \frac{1}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

درنتیجه:

$$(fog)'(۱) = \frac{۴}{۳} g'(۱) = \frac{۴}{۳} \times \frac{۳}{۲} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

$\lim_{x \rightarrow ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{۱ + \sqrt{x}}{\omega - ۲x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\omega - ۲x) + ۲(۱ + \sqrt{x})}{(\omega - ۲x)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴) = \frac{\frac{1}{۴}(\omega - ۸) + ۲(۱ + ۲)}{(\omega - ۸)^۲} = \frac{-\frac{۳}{۴} + ۶}{۹} = \frac{۲۱}{۳۶} = \frac{۷}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x = 2$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x = 2$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow -4 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = 5 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & ; x \geq 2 \\ -2x + a & ; x < 2 \end{cases}$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$(1) : 6 + b = 5 \Rightarrow b = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=2} y'(2) = g'(2)f'(g(2)) \Rightarrow 6 = g'(2)f'\left(\frac{4+1}{2-1}\right) \Rightarrow 6 = g'(2)f'(5) \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(2) = -3$$

$$(1) : 6 = -3f'(5) \Rightarrow f'(5) = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\left(8 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{3} = \frac{\frac{31}{4} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\text{اختلاف} : \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

باتوجه به اینکه ضابطه تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \rightarrow (-3)^+$ داریم:

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow [x] = -3, |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = (-3 + x)\sqrt[3]{9x} = (x - 3)\sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{9x^2}}(x - 3)$$

$$\Rightarrow f'_+(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{9}{3\sqrt[3]{729}}(-6) = -3 + \frac{9}{3 \times 9}(-6) = -3 - 2 = -5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم $f \circ g(x) = f(g(x))$ و $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ است.

گام دوم

با داشتن ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، ابتدا ضابطه $f \circ g(x)$ را تعیین کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{(g(x))^3 - 2}{1 + (g(x))^3} = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2}{1 + (\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{x - 1 - 2}{1 + x - 1} = \frac{x - 3}{x}$$

$$\Rightarrow y = f \circ g(x) = \frac{x - 3}{x}$$

ضابطه y' را به دست می‌آوریم:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = y' = \frac{x - (x - 3)}{x^2} = \frac{x - x + 3}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x به $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

طبق تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } ۲ \text{ به } ۲ + h = \frac{f(۲ + h) - f(۲)}{۲ + h - ۲} = \frac{f(۲ + h) - f(۲)}{h}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } ۲ \text{ به } ۲ + h = \frac{\left(۲ + h + \frac{۱}{۲+h}\right) - \left(۲ + \frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{h + \frac{۱}{۲+h} - \frac{۱}{۲}}{h} = \frac{\lambda}{۹}$$

$$\Rightarrow h + \frac{۱}{۲+h} - \frac{۱}{۲} = \frac{\lambda}{۹}h \xrightarrow{\times ۹} ۹h + \frac{۹}{۲+h} - \frac{۹}{۲} = \lambda h$$

$$\Rightarrow h + \frac{۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h(h+۲) + ۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h^2 + ۲h + ۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h^2 + ۴h + ۱۸ = ۹h + ۱۸ \Rightarrow ۲h^2 - ۵h = ۰ \Rightarrow h(۲h - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h = ۰ & \text{غ ق ق} \\ h = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ \end{cases}$$

اگر $h = ۰$ باشد، متغیر اصلاً تغییری نکرده و آهنگ متوسط تغییر آن برابر صفر می‌شود.

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2/56) - f(2/25)}{2/56 - 2/25} = \frac{\sqrt{2/56} - \sqrt{2/25}}{0/31} = \frac{1/6 - 1/5}{0/31} = \frac{0/1}{0/31} = \frac{10}{31}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x = 2/25 \text{ در نقطه آنی} = f'(2/25) = \frac{1}{2\sqrt{2/25}} = \frac{1}{2 \times 1/5} = \frac{1}{3}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(2/25) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \frac{31 - 30}{93} = \frac{1}{93}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک مجموعه مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > 1$ و $x < 1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} = 2\sqrt{4-3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^3 + bx = a + b \\ f(1) &= 2\sqrt{4-3} = 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)} a + b = 2 \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & ; x < 1 \\ 2 \times \frac{2}{2\sqrt{4x-3}} & ; x > 1 \end{cases}$$

تابع در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است در صورتی که $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ موجود و باهم برابر باشند، داریم:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 3a + b = \frac{2}{\sqrt{4-3}} \Rightarrow 3a + b = 2 \quad (II)$$

دو معادله I و II را در یک دستگاه حل کرده و مجهول‌های a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ a + b = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \xrightarrow{(I)} 1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

گام اول

طبق تعریف مشتق، حد خواسته شده مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ است یعنی:

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

گام دوم

به ازای $x = -1$ عبارت $(x^2 - x - 2)$ برابر صفر می شود و تابع $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 7x}$ نیز در $x = -1$ پیوسته است؛ بنابراین برای محاسبه مشتق در نقطه $x = -1$ ، کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $(x^2 - x - 2)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و در نهایت مقدار آن را به ازای $x = -1$ به دست آوریم:

$$x = -1 : f'(x) = (2x - 1) \sqrt[3]{x^2 - 7x} \Rightarrow f'(-1) = (-2 - 1) \sqrt[3]{(-1)^2 - 7(-1)} = (-3) \sqrt[3]{8} = -3 \times 2 = -6$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه به گام اول، دو مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را به دست آورده، سپس اختلاف آن‌ها از یکدیگر را محاسبه می کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازه } [0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\sqrt{9+16} - \sqrt{16}}{3} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{16}}{3} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } \sqrt{2} = f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

مقدار آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر شد، پس اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

گام اول

$f'_+(1)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ و $f'_-(1)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$.

گام دوم

برای تعیین مشتق راست و چپ تابع در نقطه $x = 1$ ، ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را روشن کنیم. ضابطه تابع و مشتق آن را به ازای $x > 1$ و $x < 1$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1 \\ x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1 \end{cases}$$

می‌دانیم $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ پس:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + x - 1 & ; x > 1 \\ x^{\frac{3}{2}} - x + 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 & ; x > 1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

با جایگذاری $x = 1$ در ضابطه‌های بالا و پایین تابع $f'(x)$ ، مقدار $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$f'_-(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه به قسمت الف از گام اول، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{36}{9} - \frac{36}{4}}{1} = \frac{36}{9} - \frac{36}{4} = 4 - 9 = -5$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x = \sqrt[3]{12}$ ، ابتدا ضابطه مشتق تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{36}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \times x^2 - 2x(36)}{x^4} = -\frac{72x}{x^4} = -\frac{72}{x^3}$$

$$x = \sqrt[3]{12} \text{ در آهنگ آنی} = f'(\sqrt[3]{12}) = -\frac{72}{(\sqrt[3]{12})^3} = -\frac{72}{12} = -6$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(\sqrt[3]{12}) = -5 - (-6) = 1$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

داریم:

$$f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 4$ تا $x = 12$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{24+1}} - \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8} = \frac{\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{9}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{\frac{3-5}{15}}{8} = \frac{-\frac{2}{15}}{8} = -\frac{1}{60}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(4)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1} = -\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$x = 4 \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(4) = -\frac{1}{(8+1)\sqrt{8+1}} = -\frac{1}{9 \times 3} = -\frac{1}{27}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) = -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{1}{60} + \frac{1}{27} = \frac{-9 + 20}{540} = \frac{11}{540}$$

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.
 ب) مختصات نقطهٔ تماس، هم در معادلهٔ خط مماس و هم در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

شیب خط $y = 3x - 2$ برابر ۳ است؛ بنابراین طبق قسمت الف از گام اول نتیجه می‌گیریم $f'(2) = 3$ است. با جایگذاری $x = 2$ در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس نیز برابر است با:

$$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

اکنون با ساده کردن حد داده‌شده حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f(x) - 4)}{x - 2} \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}_{f(2)} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}}_{f'(2)} = f(2) \times f'(2) = 4 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

گام دوم

تابع $f(x)$ در نقاط درونی هریک از زیربازه‌ها، پیوسته و مشتق‌پذیر است بنابراین کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در سه نقطهٔ مرزی $x=0$ ، $x=1$ و $x=2$ بررسی شود.
بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 0 + 1 = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + 2 = 4 \\ f(1) &= 2(1) + 2 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 2 = 4 + 2 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \\ f(2) &= 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 2 \\ 2x & ; x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_-(2) &= 2 \\ f'_+(2) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در یک نقطه ناپیوسته و در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

روش اول:

حد داده شده را ساده کرده و سپس مقدار k را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} &= 12 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4 + 4h + h^2) + 2k + kh - 2k - 8}{h} = 12 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 8h + 2h^2 + kh - 8}{h} &= 12 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 8h + kh}{h} = 12 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 2h + 8 + k &= 12 \Rightarrow 8 + k = 12 \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

حد داده شده را با استفاده از قاعده هوییتال حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} &= \frac{0}{0} \\ \xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \times 2(1)(2+h) + k}{1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 4h + k}{1} = 12 \Rightarrow 8 + k = 12 \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ب) تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و باهم برابر باشد.

گام دوم

وقتی $h \rightarrow 0^-$ ، حاصل حد داده شده $\frac{0}{0}$ و مبهم می‌شود. با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0 - (-1)f'(x_0 - h)}{1} = \lim_{h \rightarrow 0^-} f'(x_0 - h) = f'_-(x_0)$$

چون تابع در x_0 مشتق‌پذیر است، پس داریم:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -2$$

بنابراین حاصل حد داده شده برابر -2 می‌شود.

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 4a - 2b + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -8 + 2 = -6 \Rightarrow 4a - 2b = -10 \Rightarrow 2a - b = -5$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2, f'_+(-2) = -4a + b \\ 3x^2 - 1 & ; x < -2, f'_-(-2) = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a + b = 11 \\ 2a - b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -2a = 6 \Rightarrow a = -3, b = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - x + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$$

$$f(1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

گام اول

الف) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ بنابراین حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱- می‌شود.

۲) شیب خطی به معادله $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) معادله خط به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا معادله خط داده شده را به فرم استاندارد نوشته و شیب آن را به دست می‌آوریم.

$$x - 3y = 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

پس طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی برابر ۳- است. فرض می‌کنیم خط در نقطه $x = x_0$ بر منحنی مماس شده است بنابراین:

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 + 6x_0 + 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

$$y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

پس نقطه تماس دارای مختصات $(-1, 3)$ است. طبق قسمت د از گام اول، معادله خط مماس برابر است با:

$$y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 3 + 3 \Rightarrow y = -3x$$

از میان گزینه‌ها، فقط نقطه $(2, -6)$ در معادله خط صدق می‌کند.

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x = 0$ ، در معادله آن به دست می‌آید.
 ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.
 ج) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا معادله خط مماس را می‌نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y = \sqrt{x^2 + 3x} \Rightarrow y' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$

$$y'(1) = \frac{2 + 3}{2\sqrt{1 + 3}} = \frac{5}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{2 \times 2} = \frac{5}{4} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{5}{4}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow y(1) = 2$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادله خط مماس در نقطه $(1, 2)$ برابر است با:

$$y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} + 2 \Rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$

با جایگذاری $x = 0$ در معادله خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{5}{4}(0) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{3}{4}$ است.

گام اول

خط بر یک منحنی مماس است در صورتی که معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف داشته باشد.

گام دوم

با مساوی قرار دادن معادله خط و منحنی، معادله تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 - x + a = -1 \Rightarrow 2x^2 - x + a + 1 = 0$$

می‌دانیم معادله درجه دو در صورتی ریشه مضاعف دارد که $\Delta = 0$ شود:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(a+1) = 0 \Rightarrow 1 - 8(a+1) = 0 \\ \Rightarrow 8(a+1) = 1 \Rightarrow a+1 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{7}{8}$$

$$g(x) = f(4 - x^2) \Rightarrow g'(x) = -2xf'(4 - x^2) \\ \Rightarrow g''(x) = -2(f'(4 - x^2) + x(-2x)f''(4 - x^2)) \\ \Rightarrow g''(\sqrt{3}) = -2(f'(1) - 6f''(1)) = -2(-5 - 6 \times (-1)) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - [x]}{x^3 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - x - 6} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3x^2 - 1} = \frac{1}{12 - 1} = \frac{1}{11} \\ f(2) = a \Rightarrow a = \frac{1}{11}$$

تابع در $x = 1$ پیوستگی راست دارد. مشتق تابع را در همسایگی راست بررسی می‌کنیم.

$$x > 1 : f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^2 + x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 1}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2}$$

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است در صورتی که:

اولاً در این نقطه پیوسته باشد یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی:

$$f'_-(1) = f'_+(1)$$

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)(-(x - 1)) = -(x - 1)^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 0$$

همچنین داریم:

$$f'_-(x) = 2(x - 1) \Rightarrow f'_-(1) = 0$$

$$f'_+(x) = -2(x - 1) \Rightarrow f'_+(1) = 0$$

بنابراین تابع به ازای $a = 0$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 به x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

برای محاسبه مقدار a کافی است معادله $f'(a) = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4}$ را حل کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۴ به ۲۵} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{4}}{21} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$a \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4a = 49 \Rightarrow a = \frac{49}{4} = 12.25$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع دو ضابطه‌ای که روی اعداد گنگ و گویا تعریف شده، در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌ها باهم برابر باشند و در نقاط پیوسته‌ای که ضابطه مشتق باهم برابرند، مشتق‌پذیر است.

گام دوم

برای یافتن نقاط مشتق‌پذیر تابع $f(x)$ ابتدا دو ضابطه آن را مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط پیوسته را به دست آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \text{گویا } x \\ 0 & ; \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

تابع $f(x)$ فقط در نقطه $x = 0$ پیوسته است. بررسی می‌کنیم که آیا در این نقطه مشتق‌پذیر نیز هست یا نه!

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \text{گویا } x \\ 0 & ; \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقطه $x = 0$ مشتق دارد.

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است اگر اولاً در این نقطه پیوسته باشد $\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \right)$ ، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در نقطه $x = 1$ موجود و باهم برابر باشند. بررسی پیوستگی در نقطه $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a - a = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0$$

به یک رابطه همواره درست رسیدیم، پس تابع در $x = 1$ پیوسته است. بررسی مشتق‌پذیری در نقطه $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < 1 \\ x^2 - x & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & ; x < 1 \\ 2x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 2 - 1 = 1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین تابع $f(x)$ تنها به ازای $a = 1$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) $f'_+(0)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ و $f'_-(0)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ است.

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{ب) می‌دانیم:}$$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به ازای $x > 0$ و $x < 0$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطه $x = 0$ محاسبه می‌کنیم.

$$x > 0 : |x| = x, \quad [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x \times 0 = 0 \Rightarrow f'_+(0) = 0$$

$$x < 0 : |x| = -x, \quad [x] = -1 \Rightarrow f(x) = (-x)(-1) = x \Rightarrow f'_-(0) = 1$$

بنابراین:

$$f'_-(0) - f'_+(0) = 1 - 0 = 1$$

گام اول

حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ بیانگر مقدار مشتق چپ تابع در نقطه $x = 2$ یا همان $f'_-(2)$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را وقتی $x < 2$ است، تعیین می‌کنیم سپس ضابطه $f'(x)$ و مقدار $f'(-2)$ را به دست می‌آوریم.

$$x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

$$f(x) = 2 - x + \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} - 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'_-(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۱

به ازای $x = 1$ عبارت $(x - 1)$ برابر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، همچنین تابع $g(x) = \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(\Delta x - 3)^4}$ نیز در نقطه $x = 1$ پیوسته است؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار $f'(1)$ کافی است مشتق عبارت $(x - 1)$ را در تابع $g(x)$ ضرب و حاصل را به ازای $x = 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-1) \sqrt[5]{3x-2}}{(\Delta x - 3)^4} \xrightarrow[\text{در نقطه } x=1]{\text{عبارت } (x-1) \text{ عامل صفرشونده}} f'(x) = 1 \times \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(\Delta x - 3)^4}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{\sqrt[5]{3-2}}{(\Delta - 3)^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{16}$$

گزینه ۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

گام دوم

باتوجه به مشخص بودن مقادیر $y'(1)$ ، $f'(1)$ و $f(1)$ ، مقدار $g(1)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(1)$ ذکر نشده صفر بودن $f(1)$ است).

$$y'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{(-4)g(1) - 0}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{-4g(1)}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{-4}{g(1)} \Rightarrow g(1) = -\frac{4}{3}$$

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

گام دوم

باتوجه به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(fg)(2 + \Delta x) - (fg)(2)}{\Delta x} = (fg)'(2)$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول داریم:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = (2x - 1)\sqrt{2x} + (x^2 - x)\frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(2) = (4 - 1)\sqrt{4} + (2^2 - 2)\frac{1}{\sqrt{4}} = (3 \times 2) + \frac{2}{2} = 6 + 1 = 7$$