



گزینه ۳

۱

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 3} + k \xrightarrow{g(1)=1} \sqrt{1+3} + k = 1 \Rightarrow k = -1$$

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1 \Rightarrow -g(x) = 1 - \sqrt{\sqrt{x} + 3} \Rightarrow -g(x+4) = 1 - \sqrt{\sqrt{x+4} + 3}$$

$$\xrightarrow{x=0} y = 1 - \sqrt{2+3} = 1 - \sqrt{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۲

۲

$$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x-1)^2 = -(x+1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} -(x+1)^2 + 4$$

حال باید طول نقطه تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x-1)^2 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -(x^2 + 2x + 1) + 4$$

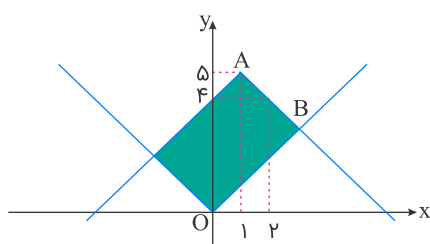
$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y = ۵ - x - ۱ $	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y = x $	۱	۰	۱



برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵ - |x - ۱| = |x| \Rightarrow |x| + |x - ۱| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x + x - ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۳ \\ -x - x + ۱ = ۵ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(۳, ۳)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(۳ - ۱)^2 + (۳ - ۵)^2} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$|BO| = \sqrt{۳^2 + ۳^2} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$S = |AB| \times |BO| = ۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

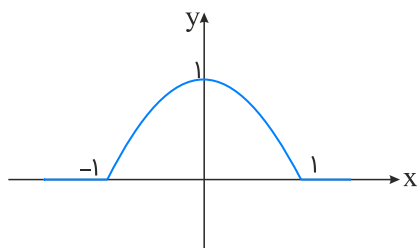
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$x < -1 \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(-1) = 0$$

$$-1 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(x) = 1 - x^2$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(1) = 0$$

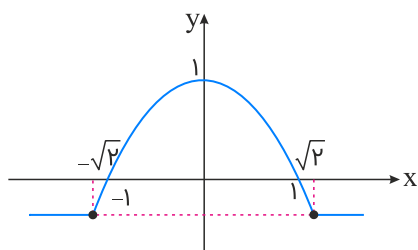
نمودار $g \circ f$ به صورت زیر است:



$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - x^2) = \begin{cases} -1; & 1 - x^2 < -1 \\ 1 - x^2; & -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 1; & 1 - x^2 > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} -1; & |x| > \sqrt{2} \\ 1 - x^2; & |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

نمودار $f \circ g$ به صورت زیر است:



ماکزیمم در نقطه‌ای به طول $\sqrt{2}$ رخ می‌دهد:

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \max(g \circ f - f \circ g) = 0 - (-1) = 1$$

اگر $x < 0$ باشد، $x^2 + x < 0$ خواهد بود، بنابراین:

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \\ \Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] &= -1 + 0 - 1 + 0 = -2 \end{aligned}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

طبق تعریف، دامنه تابع gof از رابطه زیر به دست می آید:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین لازم است برای حل تست دامنه تعریف دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ تعیین شود، سپس با استفاده از تعریف گفته شده D_{gof} را مشخص کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x+|x|} &= \begin{cases} x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x} \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} &= \frac{1}{x(x-4)} \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \\ \Rightarrow D_g &= \mathbb{R} - \{0, 4\} \end{aligned}$$

حالا دامنه تعریف تابع gof را به دست می آوریم:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \in \mathbb{R} - \{0, 4\}\}$$

$$\sqrt{x+|x|} = 4 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{2x} = 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\sqrt{x+|x|} = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

پس دامنه gof برابر است با: $D_{\text{gof}} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴, ۲) \in \text{fog}$ و $(۴, ۱) \in \text{gof}$ است. $(۴, ۲) \in \text{fog}$ است، یعنی $f(g(۴)) = ۲$ و $(۴, ۱) \in \text{gof}$ است. یعنی $g(f(۴)) = ۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(۴)) = ۲$ و $g(f(۴)) = ۱$:

$$f(g(۴)) = ۲ \xrightarrow{f(۳)=۲} g(۴) = ۳ \xrightarrow{(a, ۳) \in g} a = ۴$$

$$g(f(۴)) = ۱ \xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵) = ۱ \xrightarrow{(b, ۱) \in g} b = ۵$$

پس دوتایی مرتب (a, b) به صورت $(۴, ۵)$ درمی آید.

گزینه ۱

به راحتی می توانیم $(\text{fof})\text{og}$ را بسازیم، کافی است ورودی و خروجی ها را کنترل کنیم.

$$(x > ۰) \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$

$$(x = ۰) \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$

$$(x < ۰) \xrightarrow{g} -۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$

در واقع $((\text{fof})\text{og})(x) = ۰$ است و همواره پیوسته خواهد بود.

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

(الف) در توابع شامل قدر مطلق ابتدا باتوجه به ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق، ضابطه تابع را به صورت ساده شده می‌نویسیم.

(ب) تعیین می‌کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

(ج) برای تعیین ضابطه تابع معکوس، x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگزین می‌کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنه تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 4| + x$$

$$= \begin{cases} x \leq -4 : -(2x - 6) + (x + 4) + x = 10 \\ -4 < x < 3 : -(2x - 6) - (x + 4) + x = -2x + 2 \\ x \geq 3 : (2x - 6) - (x + 4) + x = 2x - 10 \end{cases}$$

تابع در بازه $(-4, 3)$ اکیداً نزولی است. ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y = -2x + 2 \Rightarrow y - 2 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

در ضابطه تابع اصلی وقتی $-4 < x < 3$ باشد، $-4 < y < 10$ است. پس دامنه تابع معکوس به صورت $(-4, 10)$ درمی‌آید. پس گزینه ۴ درست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

توابع $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را برابر می‌گذاریم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4) - 1}{(x+4) + 2} = \frac{2x + 7}{x + 6}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{2x - 1}{x + 2} + 4 = \frac{2x - 1 + 4x + 8}{x + 2} = \frac{6x + 7}{x + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{2x + 7}{x + 6} = \frac{6x + 7}{x + 2} \Rightarrow (2x + 7)(x + 2) = (6x + 7)(x + 6)$$

$$2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 36x + 7x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 7)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = -1 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می‌دهند. به شکل رسم‌شده در این تست خوب دقت کنید:

$$\xrightarrow{x} \underline{f} \xrightarrow{f(x)} \underline{g} \xrightarrow{g(f(x))} 2x$$

متغیر x به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا وارد ضابطه f می‌شود که خروجی آن $f(x)$ است. در مرحله دوم $f(x)$ وارد ضابطه g می‌شود که در این صورت خروجی آن $g(f(x))$ است. بنابراین در این تست $g(f(x)) = 2x$ است.

گام دوم

ضابطه $g(f(x))$ و $g(x)$ مشخص است. اول ضابطه $f(x)$ را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار $f(5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = 3x + 4, \quad g(f(x)) = 2x \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow 3f(x) = 2x - 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{2}{3}(5) - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

گام اول

به شرط‌های اشاره شده در سؤال خوب دقت کنید. هر دو مقدار x و y باید عضو اعداد طبیعی باشند. حالت‌هایی که $2x + y \leq 7$ می‌شود را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

برای حل مرتب مسأله به x از یک مقدار می‌دهیم و مقادیر قابل قبول برای y را مشخص می‌کنیم.

$$۱) \quad x = 1 \Rightarrow 2x = 2 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3, 4, 5$$

در این حالت ۵ زوج مرتب زیر ویژگی موردنظر را دارند:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$$

$$۲) \quad x = 2 \Rightarrow 2x = 4 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3$$

$$\xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3 \Rightarrow (2, 1), (2, 2), (2, 3) \in R$$

$$۳) \quad x = 3 \Rightarrow 2x = 6 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1$$

در این حالت تنها زوج مرتب $(3, 1)$ عضو رابطه R است.

به ازای مقادیر $x \geq 4$ ، هیچ مقدار طبیعی برای y یافت نمی‌شود. بنابراین رابطه R با زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده آن به صورت زیر درمی‌آید:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

پس مجموعه R دارای ۹ عضو به صورت زوج مرتب است.

روش اول:

ابتدا با تفکیک دامنه تعریف به دو قسمت $x > 0$ و $x < 0$ ، تکلیف قدرمطلق را روشن کرده و تابع را بازنویسی می کنیم. سپس برای هر یک از ضابطه های جدید، ضابطه معکوس تابع را به دست می آوریم. داریم:

$$x \neq 0 : y = \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 : |x| = x \Rightarrow y = \sqrt{x} ; y > 0 \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow y = -\sqrt{-x} ; y < 0 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{به توان } 2]{x, y > 0} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x > 0$$

$$y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{به توان } 2]{x, y < 0} y^2 = -x \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

همچنین نقطه $(0, 0)$ باید در ضابطه وارون تابع صدق کند. بنابراین ضابطه معکوس تابع به صورت $x \in \mathbb{R}$; $y = x|x|$ در می آید.

روش دوم:

اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه $f(x)$ صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه $f^{-1}(x)$ صدق می کند. نقطه $A(4, 2)$ در ضابطه $f(x)$ صدق می کند. پس نقطه $B(2, 4)$ باید عضو تابع وارون باشد. (رد گزینه های ۱ و ۲) هم چنین برد تابع $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است. پس دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ باید مجموعه اعداد حقیقی یا همان $\mathbb{R}$ باشد. تنها گزینه ای که تمام این ویژگی ها را دارد، گزینه $x \in \mathbb{R}$; $y = x|x|$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(3) = f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \Rightarrow a + 2\sqrt{a} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ \sqrt{a} = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(3) = 1$$

$$g(15) = f^{-1}(15) = b \Rightarrow f(b) = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \Rightarrow b + 2\sqrt{b} - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} - 3)(\sqrt{b} + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \\ \sqrt{b} = -5 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(15) = 9$$

بنابراین داریم:

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

با توجه به صورت سؤال $[x^2 + x] = -1$ بوده و با توجه به ویژگی های جزء صحیح محدوده قابل قبول برای $x^2 + x$ به صورت $-1 \leq x^2 + x < 0$ است.

گام دوم

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

$$۱) \quad x^2 + x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \\ x^2 \text{ ضریب} = 1 > 0 \end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است، عبارت $x^2 + x + 1$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$۲) \quad x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

پس $-1 < x < 0$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^0 < 1 \Rightarrow [x^0] = 0$$

$$g(x) = \frac{1 - 3x}{x + 2}, \quad f(x) = \frac{2x + 3}{2 - x}$$

$$g(f(x)) = \frac{1 - 3\left(\frac{2x + 3}{2 - x}\right)}{\left(\frac{2x + 3}{2 - x}\right) + 2} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1 - \frac{6x + 9}{2 - x}}{\frac{2x + 3}{2 - x} + 2}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{\frac{2 - x - 6x - 9}{2 - x}}{\frac{2x + 3 + 4 - 2x}{2 - x}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-7x - 7}{7} \Rightarrow g(f(x)) = -x - 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

ساده تر از این امکان ندارد. ضابطه $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسبه $f(۸)$ کافی است در ضابطه داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم.

گام دوم

$$f(x) = ۳ + \sqrt{۲x} \Rightarrow f(۸) = ۳ + \sqrt{۲ \times ۸} = ۳ + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷ \Rightarrow f(۸) = ۷$$

$$[x - ۲] = ۱ \Rightarrow ۱ \leq x - ۲ < ۲ \Rightarrow ۳ \leq x < ۴$$

اگر $۳ \leq x < ۴$ باشد، پس $x - ۳ \geq ۰$ و $x - ۴ < ۰$ خواهد بود.

$$f(x) = \underbrace{|x - ۳|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|x - ۴|}_{\text{منفی}} = x - ۳ + (x - ۴) = ۲x - ۷$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow ۲x - ۷ = ۲x^۲ + x - ۱۷ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۱۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲x - ۵)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۵}{۲} \times \\ x = -۲ \times \end{cases}$$

هیچ کدام از جواب های به دست آمده در فاصله $۳ \leq x < ۴$ نیستند؛ پس معادله $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ ها}]{\text{۱۶ واحد انتقال در جهت}} y_1 = -x^2 + 2x + 16$$

حال معادله جدید را با معادله قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطه برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_1 \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{ق.ق} \\ x = -2 & \text{(غ.ق.ق زیرا } x > 1) \end{cases}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{16(1 + 4)} = 4\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

برای تعیین نقطه تلاقی دو تابع f و fog باید اول ضابطه fog مشخص شود. سپس معادله $f(x) = \text{fog}(x)$ را حل کرده و نقطه تلاقی دو تابع که در واقع ریشه همین معادله است را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = (2x - 3)^2, \quad g(x) = x + 2 \Rightarrow \text{fog}(x) = f(g(x)) = (2g(x) - 3)^2 \\ = (2(x + 2) - 3)^2 = (2x + 4 - 3)^2 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

معادله $f(x) = \text{fog}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \text{fog}(x) \Rightarrow (2x - 3)^2 = (2x + 1)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین نمودار دو تابع f و fog در نقطه ای به طول $x = \frac{1}{2}$ با هم متقاطع اند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

ضابطه $f(x)$ و $f(g(x))$ برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین می کنیم، سپس ضابطه تابع $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = x^2 - x - 2, \quad f(g(x)) = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow (g(x))^2 - g(x) = x^2 + x$$

برای این که بتوانیم راحت تر ضابطه $g(x)$ را تعیین کنیم، سعی می کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^2 - g(x) = x^2 + x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{1}{4} \text{ اضافه می کنیم}} (g(x))^2 - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow g(x) - \frac{1}{2} = \pm(x + \frac{1}{2})$$

پس برای ضابطه $g(x)$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$۱) \quad g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1$$

$$۲) \quad g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2$$

با توجه به گزینه های موجود، گزینه ۱ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

دامنه تابع $\{1\} - [-3, 3]$ است. اگر $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعه دامنه تابع باشد، دو حالت رخ می دهد:

$$(۱) : (k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 < 1 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \\ k-2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in [-1, -\frac{1}{3})$$

$$(۲) : (k-2, 3k+2) \subseteq (1, 3] \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \\ k-2 > 1 \Rightarrow k > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

گام اول

الف) ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را باتوجه به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدوده x بر اساس ریشه عبارت‌های داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.

ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشه عبارت‌های درون قدر مطلق، $x = -1$ و $x = 3$ است. داریم:

$$x < -1 : f(x) = -2x + 6 - (-x - 1) = -2x + 6 + x + 1 = -x + 7$$

$$-1 \leq x \leq 3 : f(x) = -2x + 6 - (x + 1) = -3x + 5$$

$$x > 3 : f(x) = 2x - 6 - (x + 1) = x - 7$$

در بازه $x > 3$ تابع $f(x) = x - 7$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = x - 7 \Rightarrow x = y + 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, \quad x > -4$$

$$g(x) = x^3 + x, \quad f(x) = \frac{2}{5}x - 4$$

اول $f^{-1}(\lambda)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x - 4 = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = 30$$

حال داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = g^{-1}(30)$$

$$g(x) = 30 \Rightarrow x^3 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

حال $g^{-1} \circ f$ را حساب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 4 \\ 2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 4 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g^{-1}} 5 \end{array} \right\} \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

فرض می‌کنیم که $h = g^{-1} \circ f$ باشد. خواسته مسئله $h - f$ است که باید در دامنه مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{1, 4\}$$

$$h - f = \{(1, 4 - 2), (4, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{2, -1\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

تابع دوضابطه‌ای است. برای محاسبه $f(1)$ از ضابطه پایین و برای محاسبه $f(5)$ از ضابطه بالا استفاده می‌کنیم.

گام دوم

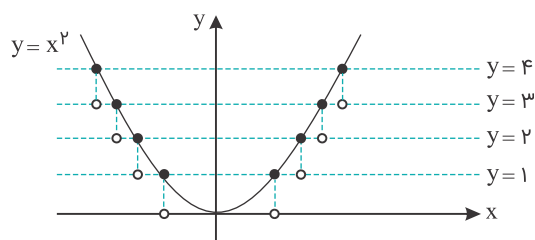
$$x > 3 : f(x) = x - \sqrt{x+4} \Rightarrow f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$x \leq 3 : f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

پس مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ برابر است با:

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 2(2) + 3 + 2 = 4 + 3 + 2 = 9$$

اول نمودار تابع $y = x^2$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می کنیم. برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^2]$ از روی نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(-2, 2)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) قرار می گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم. در نهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $(-2, 2)$ از هفت پاره خط تشکیل شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

برای به دست آوردن برد تابع gof ابتدا باید ضابطه آن را تشکیل دهیم.

$$f(x) = x - [x], \quad g(x) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow \text{gof}(x) = g(f(x)) = \frac{1-f(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{1-x+[x]}{x-[x]} = \frac{1}{x-[x]} - 1$$

می دانیم $0 < x - [x] < 1$ ، از طرفی $x - [x]$ نمی تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی شود، لذا:

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (\text{gof})(x) > 0 \Rightarrow R_{\text{gof}} = (0, +\infty)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = x + 4 \Rightarrow yx - x = 2y + 4$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{2x+4}{x-1}$$

با مساوی قرار دادن ضابطه تابع با وارون آن نقطه تقاطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 + 4x - 4 - 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +4 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

برای حل این تست از دو روش استفاده می‌کنیم. روش اول حل معمولی تست است، یعنی ابتدا ضابطه تابع اصلی را ساده کرده، سپس با استفاده از آن ضابطه تابع معکوس را به دست می‌آوریم. روش دوم یک روش بسیار ساده و در عین حال کوتاه برای حل این مدل تست‌ها است. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع اصلی صدق کند، در این صورت نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع وارون یا معکوس صدق خواهد کرد. با انتخاب یک نقطه مناسب که متعلق به تابع $f(x)$ باشد، بررسی می‌کنیم آیا با جابه جایی مؤلفه‌های اول و دوم، نقطه جدید در ضابطه تابع معکوس صدق می‌کند یا خیر. روش اول:

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y < 1 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \Rightarrow -1 < y < 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$\text{بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت } |x| < 1, f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} \text{ درمی‌آید}$$

روش دوم:

نقطه $(0, 0)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می‌کند. از بین گزینه‌ها تنها معادله‌ای که $x = 0$ عضو دامنه تعریفش باشد و نقطه $(0, 0)$ هم در ضابطه آن صدق کند، ضابطه $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$ است، به همین راحتی.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

دامنه تابع fog از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

گام دوم

دامنه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین کرده و با استفاده از رابطه گفته شده در گام اول، D_{fog} را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

$$-x^2 + x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow D_f = (-1, 2)$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2\}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{e}\right)^x > 0} \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2 \Rightarrow (e^{-1})^x < 2 \Rightarrow e^{-x} < 2 \Rightarrow -x < \ln 2$$

$$\xrightarrow{\div -1} x > -\ln 2 \Rightarrow D_{fog} = (-\ln 2, +\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) ضابطه تابع fog(x) یعنی $f(g(x))$ با جایگذاری ضابطه $g(x)$ در تابع $f(x)$ به دست می‌آید.
 ب) می‌خواهیم نمودار تابع fog(x) زیر محور xها قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادله $\text{fog}(x) < 0$ را به دست آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned} \text{fog}(x) &= f(g(x)) = \left(\frac{1}{e}(x-3)\right)^2 + \frac{1}{e}(x-3) - 2 = \frac{1}{e}(x-3)^2 + \frac{1}{e}x - \frac{3}{e} - 2 \\ &= \frac{1}{e}x^2 - \frac{3}{e}x + \frac{9}{e} + \frac{1}{e}x - \frac{3}{e} - 2 = \frac{1}{e}x^2 - x - \frac{5}{e} \end{aligned}$$

حالا مجموعه جواب نامعادله $\text{fog}(x) < 0$ را تعیین می‌کنیم:

$$\text{fog}(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{e}x^2 - x - \frac{5}{e} < 0 \xrightarrow{\times e} x^2 - ex - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 5)$$

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

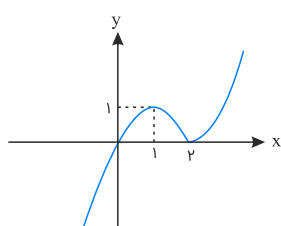
الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطه تابع را به صورت تفکیک شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می‌کنیم $x \geq 2$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < 2$ باشد و ضابطه تابع را تعیین می‌کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.

ج) باتوجه به این نکته که $D_{f^{-1}} = R_f$ ، دامنه تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطه آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow |x-2| = x-2 \Rightarrow y = x(x-2) \\ x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \Rightarrow y = -x(x-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & ; x < 2 \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازه $[1, 2]$ است. برد تابع در این بازه $[0, 1]$ است. پس $D_{f^{-1}} = [0, 1]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدوده مشخص شده ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow{+1} 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 1 - y = (x-1)^2 \Rightarrow x-1 = \sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x} ; 0 \leq x \leq 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲
قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطه $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطه $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|-x + 2| - x}$$

$$|-x + 2| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 : -x + 2 < 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ غ.ق.ق} \\ x \leq 2 : -x + 2 \geq 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2x + 2 \geq 0 \\ \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به بازه اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$ ، به صورت $x \leq 1$ در می آید.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

می دانیم اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع صدق کند، نقطه به مختصات $A'(\beta, \alpha)$ در ضابطه وارون تابع صدق می کند.

گام دوم

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow (4, 2) \in f \Rightarrow (2, 4) \in f^{-1}$$

با استفاده از این نقطه گزینه های ۱ و ۴ نمی توانند جواب تست باشند.

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow (-4, -2) \in f \Rightarrow (-2, -4) \in f^{-1}$$

باتوجه به این دو مثال ضابطه وارون تابع به صورت $f^{-1}(x) = x|x|$ خواهد بود.

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} \approx 1/7$ ، پس:

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 \times 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{p}f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{p} \times 1 = -0/5$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{p}f(\sqrt{3})) = (-0/5)^2 - 2[-0/5] = 0/25 - 2(-1) = 2/25$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

با توجه به ضابطه های $f(x)$ و $f(g(x))$ ، تابع $f(g(x))$ را بر حسب تابع $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس بدون این که ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت مستقل تعیین کنیم، x را برابر -۲ در نظر گرفته و مقدار $g(-۲)$ را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= ۲x^۲ + ۴, \quad f(g(x)) = ۴x^۲ + ۶x \Rightarrow ۲(g(x))^۲ + ۴ = ۴x^۲ + ۶x \\ \xrightarrow{x=-۲} ۲(g(-۲))^۲ + ۴ &= ۴(-۲)^۲ + ۶(-۲) = ۴(۴) + ۶(-۲) = ۱۶ - ۱۲ = ۴ \\ \Rightarrow ۲(g(-۲))^۲ + ۴ &= ۴ \Rightarrow ۲(g(-۲))^۲ = ۰ \Rightarrow (g(-۲))^۲ = ۰ \Rightarrow g(-۲) = ۰ \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

در ضابطه $g(x)$ ، به جای x ضابطه $f(x)$ را جایگذاری می کنیم.

گام دوم

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(\frac{۲x-۱}{x+۱}\right) = \frac{۲ \times \frac{۲x-۱}{x+۱} + ۲}{۲ - \frac{۲x-۱}{x+۱}} \\ &= \frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}} = \frac{۶x}{۳} = ۲x \Rightarrow g(f(x)) = ۲x \end{aligned}$$

$y = -x$; $x > ۰$: نیمساز ناحیه چهارم

نمودار f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را قطع می کند، بنابراین:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{۲}{x} = x \Rightarrow ۲x = \frac{۲}{x} \\ \Rightarrow x^۲ &= ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x>۰} x = ۱ \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$f(x) = 2 - |x + 1| = \begin{cases} x + 3 & ; x \leq -1 \\ -x + 1 & ; x > -1 \end{cases}$$

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 2x & ; x > 0 \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2 - |x + 1|}{x + |x|} = \begin{cases} \text{ن.ت} & ; x \leq 0 \\ \frac{1 - x}{2x} & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \quad ; x > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y > -\frac{1}{2} \Rightarrow R_y = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

گام اول

از ویژگی های تابع وارون (معکوس) برای حل تست استفاده می کنیم. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع f صدق کند، نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع معکوس یا همان f^{-1} صدق می کند. سؤال از ما $f^{-1}(۴)$ را می خواهد. فرض کنیم مقدار $f^{-1}(۴)$ برابر α شود، در این صورت $(۴, \alpha)$ در ضابطه f^{-1} صدق می کند پس نقطه ای به مختصات $(\alpha, ۴)$ باید در ضابطه تابع $f(x)$ صدق کند. این نقطه را در ضابطه تابع اصلی جای گذاری کرده و مقدار α را محاسبه می کنیم.

گام دوم

معادله $f(\alpha) = ۴$ را حل کرده و مقدار α را به دست می آوریم:

$$f(x) = -x + \sqrt{-2x} \xrightarrow{f(\alpha)=4} 4 = -\alpha + \sqrt{-2\alpha} \Rightarrow \sqrt{-2\alpha} = \alpha + 4$$

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد پس داریم:

$$-2\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 0, \quad \alpha + 4 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -4$$

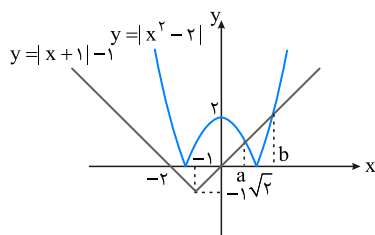
پس $\alpha \in [-4, 0]$. حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$-2\alpha = (\alpha + 4)^2 \Rightarrow -2\alpha = \alpha^2 + 8\alpha + 16 \Rightarrow \alpha^2 + 10\alpha + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha + 8)(\alpha + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = -8 \end{cases}$$

با توجه به این که $\alpha \in [-4, 0]$ است، فقط $\alpha = -2$ قابل قبول خواهد بود.

دو منحنی $y_1 = |x+1| - 1$ و $y_2 = |x^2 - 2|$ را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله (a, b) است. برای یافتن a ، $0 < x < \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x^2 - 2| = |x + 1| - 1 \Rightarrow -(x^2 - 2) = x + 1 - 1 \Rightarrow -x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} x = a = 1$$

برای یافتن b ، $x > \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 2 = x + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{x > \sqrt{2}} x = b = 2$$

$$\text{مجموعه جواب} = (a, b) = (1, 2) \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2+1}{2} = 1.5$$

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x - 15) > 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0) \cup (15, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{x | x \in (-\infty, 0) \cup (15, +\infty), \log(x^2 - 15x) \leq 2\right\}$$

$$\log(x^2 - 15x) \leq \log_{10}^{100} \Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)(x + 5) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, 20] (**)$$

باید از (*) و (**) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**), (*)} x \in [-5, 0) \cup (15, 20]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر $x - 3 = t$ ، x را بر حسب t به دست آورده و ضابطهٔ $f(x)$ را به صورت مستقل تعیین می‌کنیم.

$$f(x - 3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow[x=t+3]{x-3=t} f(t) = (t + 3)^2 - 4(t + 3) + 5$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

ضابطهٔ $f(x)$ به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطهٔ $f(1 - x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f(1 - x) = (1 - x)^2 + 2(1 - x) + 2 = 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2$$

$$= x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(1 - x) = x^2 - 4x + 5$$

روش دوم: روش دیگر برای به دست آوردن $f(1 - x)$ از روی ضابطهٔ $f(x - 3)$ این است که به جای x متغیر $4 - x$ را جای گذاری کنیم.

$$f(x - 3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x \rightarrow 4-x} f(4 - x - 3) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 5$$

$$\Rightarrow f(1 - x) = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 5 = x^2 - 4x + 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

اگر نمودار $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی انتقال دهیم، $f(x) = (x+2)^2 - (x+2) - 3$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به طرف y های منفی منتقل می‌کنیم، $g(x) = f(x) - 9$ به دست می‌آید.

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

راه حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = 0 \Leftarrow$ غ.ق.ق $\Leftarrow$ گزینه ۲ حذف می‌شود.

$x = 1 \Leftarrow$ غ.ق.ق $\Leftarrow$ گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - 9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

از طرفی چون $x \neq 0$ است، پس گزینه ۴ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

گام اول

وقتی تست اشاره کرده $g(f(a)) = 5$ است، یعنی این که باید از تابع g زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفه دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفه اول برابر $f(a)$ بوده و با داشتن ضابطه تابع $f(x)$ مقدار a به راحتی محاسبه می شود.

گام دوم

$g(f(a)) = 5$ است. در بین زوج مرتب های تشکیل دهنده تابع g ، زوج مرتب $(6, 5)$ دارای مؤلفه دوم ۵ است، بنابراین می توان نتیجه گرفت: $f(a) = 6$. حال با داشتن ضابطه $f(x)$ ، مقدار a را به دست می آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=6} a + \sqrt{a} = 6$$

برای حل این معادله می توانیم با تغییر متغیر $t = \sqrt{a}$ ، معادله را به یک معادله درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد t باید مثبت شود).

$$a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -3 & \text{غ ق ق} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

اما راه سریع تر و راحت تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه هاست. در این صورت هم، $a = 4$ جواب تست می شود.

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطه تابع $\text{gof}(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطه تابع $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جمله "مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور x ها قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع gof بالای محور x ها قرار بگیرد باید مقدار y تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادله $\text{gof}(x) > 0$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطه $\text{gof}(x)$ و حل نامعادله $\text{gof}(x) > 0$:

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + 2, \quad f(x) = x^2 + 3x$$

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{4}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2$$

$$\text{gof}(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2 + 3x - 8 < 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

بنابراین در بازه $(-4, 1)$ مقادیر تابع $\text{gof}(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور x ها قرار می گیرد.

نکته:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

ابتدا $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{1-2x+2-2}{x+1} = \frac{-2x-2}{x+1} + \frac{1+2}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$$

طبق نکته داریم:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\text{در } (-1) \text{ ضرب می‌کنیم}} -1 < [x] - x \leq 0$$

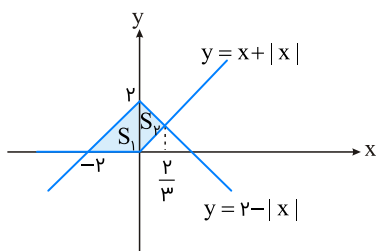
$$\xrightarrow{+1} 0 < [x] - x + 1 \leq 1 \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} 1 \leq \frac{1}{[x] - x + 1}$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} \xrightarrow{-2} 1 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} - 2$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \geq 1 \Rightarrow R_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}, \quad y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & ; x \geq 0 \\ x + 2 & ; x < 0 \end{cases}$$



$$2 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۷

$$(x+1)f(x) \geq 0$$

$$(x+1)f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ f(x) = 0 \Rightarrow x = -3, -1, 2 \end{cases}$$

دامنه تابع به صورت $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \cup \{-1\}$ است که طبق گفته مسئله، دامنه تابع غیرنقطه‌ای به صورت $\mathbb{R} - (-3, 2)$ خواهد بود.

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$(x+1)f(x)$	+	0	-	0	+

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. سپس باتوجه به محدوده قابل قبول برای x ، بازه‌ای که در آن تابع $f(3-x)$ تعریف شده است را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس باید داشته باشیم: $0 \leq 3-x \leq 2$ ، بنابراین:

$$0 \leq 3-x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطه $f(3-x)$ را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{2x - x^2} &\Rightarrow f(3-x) = \sqrt{2(3-x) - (3-x)^2} \\ &= \sqrt{6 - 2x - 9 + 6x - x^2} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \\ &\xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3] \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a) = g^{-1}(f^{-1}(a)) = \lambda \Rightarrow (f^{-1}(a), \lambda) \in g^{-1}$$

$$\Rightarrow (\lambda, f^{-1}(a)) \in g \Rightarrow g(\lambda) = f^{-1}(a) \quad (*)$$

$$g(x) = \sqrt{5x+9} \Rightarrow g(\lambda) = \sqrt{49} \Rightarrow g(\lambda) = 7$$

$$\xrightarrow{(*)} f^{-1}(a) = 7 \Rightarrow (a, 7) \in f^{-1} \Rightarrow (7, a) \in f \Rightarrow a = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

گام اول

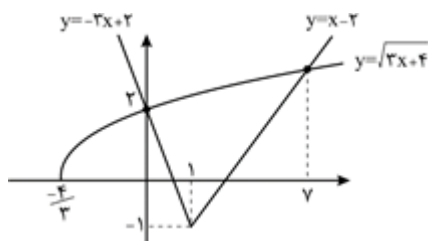
هر عبارت شامل قدر مطلق را می‌توان به ازای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه قدر مطلق و مقادیر کوچک‌تر از آن به طور جداگانه بررسی کرد.

گام دوم

روش اول:

منحنی مربوط به دو تابع $y = \sqrt{3x+4}$ و $y = 2|x-1| - x$ را رسم می‌کنیم. مجموعه جواب ناحیه‌ای است که نمودار تابع $y = \sqrt{3x+4}$ بالای نمودار تابع $y = 2|x-1| - x$ قرار می‌گیرد. باتوجه به گام اول، ابتدا وضعیت قدر مطلق را مشخص می‌کنیم، داریم:

$$y = 2|x-1| - x = \begin{cases} 2(x-1) - x & ; x \geq 1 \\ 2(-x+1) - x & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 1 \\ -3x+2 & ; x < 1 \end{cases}$$



همان‌طور که از روی نمودار مشخص است مجموعه جواب نامعادله داده شده بازه $(0, 7)$ است و طول وسط آن $\frac{7}{3}$ می‌شود.
روش دوم:

عبارت رادیکالی $\sqrt{3x+4}$ روی بازه $[-\frac{4}{3}, +\infty)$ تعریف شده و $x=1$ ریشه عبارت درون قدر مطلق است، بنابراین مجموعه جواب نامعادله را در دو حالت $x \geq 1$ و $-\frac{4}{3} \leq x < 1$ به دست می‌آوریم:

$$x \geq 1: |x-1| = x-1 \Rightarrow \sqrt{3x+4} > 2(x-1) - x \Rightarrow \sqrt{3x+4} > x-2$$

در بازه $[1, 2)$ این رابطه همواره برقرار است؛ زیرا روی این بازه $x-2 < 0$ و $\sqrt{3x+4} > 0$ است. به ازای $x \geq 2$ دو طرف نامساوی مثبت است بنابراین می‌توان دو طرف را به توان دو رساند، پس داریم:

$$\begin{aligned} 3x+4 &> (x-2)^2 \Rightarrow 3x+4 > x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-7x < 0 \\ \Rightarrow x(x-7) < 0 &\Rightarrow 0 < x < 7 \xrightarrow{x \geq 1} 1 \leq x < 7 \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < 1: |x-1| = -(x-1) = -x+1 &\Rightarrow \sqrt{3x+4} > 2(-x+1) - x \\ \Rightarrow \sqrt{3x+4} > -2x+2-x &\Rightarrow \sqrt{3x+4} > -3x+2 \end{aligned}$$

در محدوده $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ نامعادله $\sqrt{3x+4} > -3x+2$ برقرار نیست پس جواب نامعادله را در محدوده $0 < x < 1$ بررسی می‌کنیم. باتوجه به اینکه به ازای $0 < x < 1$ ، $|\sqrt{3x+4}| > |-3x+2|$ است پس می‌توان دو طرف نامساوی را به توان دو رساند:

$$3x+4 > (2-3x)^2 \Rightarrow 3x+4 > 9x^2-12x+4 \Rightarrow 9x^2-15x < 0 \\ \Rightarrow 3x(3x-5) < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{5}{3} \xrightarrow{0 < x < 1} 0 < x < 1 \quad (\text{II})$$

اجتماع دو بازه (I) و (II)، بازه $0 < x < 1$ می‌شود که طول وسط این بازه برابر $\frac{1}{2}$ است.

گزینه ۲

۵۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه به اینکه $f^{-1}(g(2a)) = 6$ است، می‌توان نتیجه گرفت: $g(2a) = f(6)$

گام دوم

$$g(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow g(2a) = \frac{2a}{2a-1} = f(6) = 3 \\ \Rightarrow 2a = 3(2a-1) \Rightarrow 2a = 6a-3 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

گزینه ۲

۵۶

$$\sqrt{x+3}-1=x \Rightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \Rightarrow x+3=x^2+2x+1 \\ \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \in D \\ x=-2 \notin D \end{cases}$$

پس نقطه تلاقی f و f^{-1} نقطه $(1, 1)$ است و فاصله آن از مبدأ $\sqrt{2}$ خواهد شد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(۶) = f^{-1}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۲)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \\ \sqrt{a} = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۶) = ۴$$

$$g(۱۲) = f^{-1}(۱۲) = b \Rightarrow f(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} + ۴)(\sqrt{b} - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -۴ \text{ غ ق ق} \\ \sqrt{b} = ۳ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow g(۱۲) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۶) + g(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

یک روش این است که از روی تابع اصلی، ضابطه وارون تابع را پیدا کنیم. اما روش ساده تری هم برای حل تست وجود دارد: ابتدا بررسی کنیم در بین گزینه ها کدام گزینه می تواند به عنوان تابع در نظر گرفته شود. سپس با توجه به این که اگر نقطه (α, β) در ضابطه اصلی صدق کند، نقطه (β, α) در وارون آن صدق می کند، گزینه درست را پیدا کنیم.

روش اول:

$$۱) y = \sqrt{x}, x \geq ۰, y \geq ۰ \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x \geq ۰$$

$$۲) y = -\sqrt{-x}, x < ۰ \Rightarrow y < ۰ \xrightarrow{\text{به توان } ۲} y^2 = -x$$

$$\Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < ۰$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq ۰ \\ -x^2 & ; x < ۰ \end{cases} \Rightarrow y = x|x|, x \in \mathbb{R}$$

روش دوم:

گزینه های ۳ و ۴ اصلاً تابع نیستند. نقطه $(۲, ۴)$ در ضابطه تابع اصلی صدق می کند. فقط گزینه ۱ است که نقطه $(۲, ۴)$ در آن صدق می کند و می تواند به عنوان ضابطه وارون در نظر گرفته شود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم هریک از زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده دو تابع f و g ، توابع f^{-1} و g^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها مشخص می‌کنیم، سپس تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا به سراغ تابع f^{-1} می‌رویم، سپس با خروجی‌هایی که به ما می‌دهد بررسی می‌کنیم که تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ تشکیل می‌شود یا خیر.

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (4, 3)\}$$

$$g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, 5, 4\}$$

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(1) = 2 \Rightarrow (2, 2) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(3)) = g^{-1}(2) = 3 \Rightarrow (3, 3) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 4 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(4) = 5 \Rightarrow (5, 5) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x = 4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(4)) = g^{-1}(3) \Rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

بنابراین تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ به صورت $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ درمی‌آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

در تست حاصل مقادیری از دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطه $f(x)$ و $g(x)$ ، ابتدا ضابطه توابع $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |(x+1)^2| \xrightarrow{(x+1)^2 \geq 0} (f \circ g)(x) = (x+1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (|x| + 1)^2$$

$$(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 - (|1 - \sqrt{2}| + 1)^2 =$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

اگر دو تابع f و g که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بیان شده‌اند را داشته باشیم، پس $f \cap g$ زیرمجموعه‌ای از این توابع خواهد بود، بنابراین تابع است. همچنین $f - g$ نیز تابع خواهد بود. ترکیب دو تابع f و g یعنی $f \circ g$ نیز تابع است. رابطه $f \cup g$ ممکن است تابع نباشد. به مثال زیر دقت کنید:

تابع است $f = \{(2, 3)\}$

تابع است $g = \{(2, 4)\}$

تابع نیست $f \cup g = \{(2, 3), (2, 4)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

دامنه تابع $g \circ f$ از رابطه $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1]\}$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 & (1) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) : x \in \{0\}$$

با استفاده از ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم (x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض می کنیم). سپس معادله $f^{-1}(g(a)) = ۶$ را حل کرده و مقدار a را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow y = 2x - 5 \Rightarrow y + 5 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

$$f^{-1}(g(a)) = ۶ \Rightarrow \frac{g(a)+5}{2} = ۶ \Rightarrow g(a) + 5 = ۱۲ \Rightarrow g(a) = ۷ \xrightarrow{(۴,۷) \in g} a = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

داریم: $(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20))$ ، پس کافی است $f^{-1}(20)$ را یافته و در تابع g^{-1} قرار دهیم.
فرض کنیم $f^{-1}(20) = a$ باشد، پس $f(a) = 20$ است و داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = 20 \Rightarrow a = 16 \\ \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

بنابراین $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$ حال فرض می کنیم $g^{-1}(16) = b$ ، پس $g(b) = 16$ است. در نتیجه:

$$g(x) = \frac{9x+6}{1-x} \Rightarrow g(b) = \frac{9b+6}{1-b} = 16 \Rightarrow 9b+6 = 16-16b$$

$$\Rightarrow 25b = 10 \Rightarrow b = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y = x$ و $y = \sqrt{-x+2}$ (نیمساز ناحیه اول و سوم)، آن ها را مساوی هم قرار می دهیم:

$$\sqrt{-x+2} = x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$x = -2$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادله $(*)$ صدق نمی کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به ما داده شده و ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را می خواهند. برای این کار ابتدا ضابطه دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم سپس برای تعیین ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ یا همان $g^{-1}(f^{-1}(x))$ در ضابطه $g^{-1}(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 + \sqrt{x} &\Rightarrow y = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان } 2} (y - 1)^2 = x \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 1)^2; \quad x \geq 1 \\ g(x) = x^2 &\Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}; \quad x > 0 \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه تابع $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ f^{-1}(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| \\ &\xrightarrow[x-1 \geq 0]{x \geq 1} g^{-1} \circ f^{-1}(x) = x - 1 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \quad (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطه $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) \xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(0) = 0 + 0 - 2 = -2$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطه $g(f(x)) = -2$ برقرار است.

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} &\Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow g(f(x)) = g(-1) \\ &\xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2 \end{aligned}$$

پس رابطه $g(f(x)) = -2$ به ازای تمام x های صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای $\mathbb{R}$ برقرار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

در توابع شامل قدر مطلق ابتدا تکلیف قدرمطلق را مشخص کنیم. باتوجه به ریشه عبارت داخل قدرمطلق، ضابطه تابع را به صورت تفکیک شده به دست می آوریم. سپس هرکدام از ضابطه ها را که یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر بود انتخاب کرده و ضابطه تابع معکوس را مشخص می کنیم.

$$f(x) = 2x - |4 - 2x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 \Rightarrow 4 - 2x < 0 \Rightarrow |4 - 2x| = 2x - 4 \Rightarrow f(x) = 2x - 2x + 4 = 4 \\ x \leq 2 \Rightarrow 4 - 2x \geq 0 \Rightarrow |4 - 2x| = 4 - 2x \Rightarrow f(x) = 2x - 4 + 2x = 4x - 4 \end{cases}$$

ضابطه $f(x) = 4$ یک به یک نیست، پس وارون ندارد؛ پس تابع فقط روی بازه $(-\infty, 2]$ معکوس پذیر است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می کنیم:

$$x \in (-\infty, 2] \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow 4x \leq 8 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4$$

برد تابع f بازه $(-\infty, 4]$ به دست آمد. پس دامنه f^{-1} نیز بازه $(-\infty, 4]$ خواهد بود.

$$y = 4x - 4 \Rightarrow y + 4 = 4x \Rightarrow x = \frac{y + 4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 4}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad ; x \leq 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = y \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = y + 4$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = y + 4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x - 1| = \sqrt{y + 4}$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x - 1 = \sqrt{y + 4} \Rightarrow x = \sqrt{y + 4} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4} + 1$$

حال f^{-1} را با g قطع می دهیم:

$$\sqrt{x + 4} + 1 = \frac{x - 9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x + 4} = x - 11 \quad (1)$$

با امتحان کردن گزینه ها به راحتی معلوم می شود که $x = 21$ در معادله (۱) صدق می کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

نکته: $0 \leq x - [x] < 1$
ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 + 4x = -x^2 + 4x - 4 + 4 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 = -(x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

اکنون تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -(2x - [2x] - 2)^2 + 4$$

طبق نکته داریم:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2x - [2x] < 1 \xrightarrow{-2} -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1 \\ \xrightarrow{+2} 1 &< (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4 \\ \xrightarrow{\times(-1)} -4 &\leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1 \\ \xrightarrow{+4} 0 &\leq -(2x - [2x] - 2)^2 + 4 < 3 \\ \Rightarrow 0 &\leq g(f(x)) < 3 \Rightarrow R_{g \circ f} = [0, 3) \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

مجموعه جواب نامعادله $f(x) > \frac{7}{2}$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned} f(x) > \frac{7}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \xrightarrow{\times 2} -x^2 + 4x + 12 > 7 \\ \Rightarrow x^2 - 4x - 5 &< 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow x \in (-1, 5) \end{aligned}$$

بنابراین بازه (a, b) به صورت $(-1, 5)$ درآمده و بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$b - a = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$$

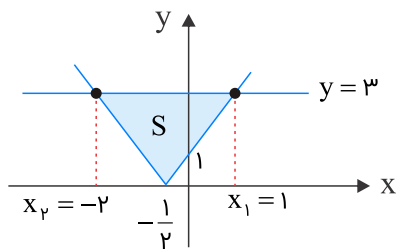
ابتدا تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \Rightarrow (\text{gof})(x) = |2x + 1|$$

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & ; x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع $|2x + 1|$ و خط $y = 3$ را می‌یابیم.

$$2x_1 + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1, \quad -2x_2 - 1 = 3 \Rightarrow x_2 = -2$$



$$S = \frac{(|x_1| + |x_2|) \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(-x) = \frac{1}{y} \left(-x + \sqrt{x^2 + 4} \right)$$

حاصل ضرب دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ برابر است با:

$$f(x) f(-x) = \frac{1}{y} \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right) \frac{1}{y} \left(-x + \sqrt{x^2 + 4} \right) = \frac{1}{y} (x^2 + 4 - x^2) = \frac{1}{y} \times 4 = 1$$

$$\Rightarrow f(x) f(-x) = 1$$

بنابراین اگر فرض کنیم $f(x) = \alpha$ باشد آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = \alpha &\Rightarrow f^{-1}(\alpha) = x \\ f(-x) = \frac{1}{\alpha} &\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -x \end{aligned} \right\} \Rightarrow f^{-1}(\alpha) + f^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = x - x = 0$$

روش دوم: با استفاده از به دست آوردن ضابطه تابع وارون نیز می‌توان به جواب رسید.

ابتدا $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1}{y} (x + \sqrt{x^2 + 4}) \Rightarrow y^2 = x + \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow y^2 - x = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} 4y^2 + x^2 - 4xy = x^2 + 4 \Rightarrow 4xy = 4y^2 - 4$$

$$\Rightarrow xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{y} = y - \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}$$

همچنین داریم:

$$f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} - x$$

بنابراین:

$$f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - x = 0$$

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

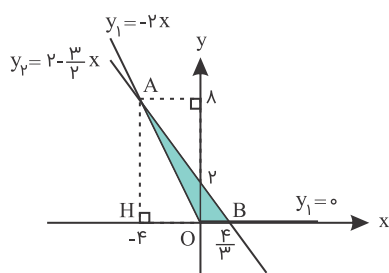
$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq 0$ و $x < 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{4}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطه A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$2 - \frac{3}{4}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{4}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{4}x = 2 \Rightarrow x = -8$$

$$\xrightarrow{y = -2x} y = 16 \Rightarrow A(-8, 16)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\triangle ABO$ برابر ۱۶ است و مساحتش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{16}{3} = \frac{64}{3}$$

اگر خط $3y - 2x = 4$ را به صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینه خط $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$3y - 4 = 2x \Rightarrow x = \frac{3y - 4}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{2} = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

داریم $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$. ابتدا $g^{-1}(-9)$ را می‌یابیم. فرض می‌کنیم $g^{-1}(-9) = a$ باشد، پس $g(a) = -9$ و داریم:

$$g(x) = \frac{3-x}{2} \Rightarrow g(a) = \frac{3-a}{2} = -9 \Rightarrow 3-a = -18 \Rightarrow a = 21$$

پس کافی است $f^{-1}(21)$ را حساب کنیم. فرض می‌کنیم $f^{-1}(21) = b$ باشد، پس $f(b) = 21$ است و داریم:

$$f(x) = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow f(b) = b^2 - 4b + 9 = 21 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (b-6)(b+2) = 0 \xrightarrow{b \geq 2} b = 6$$

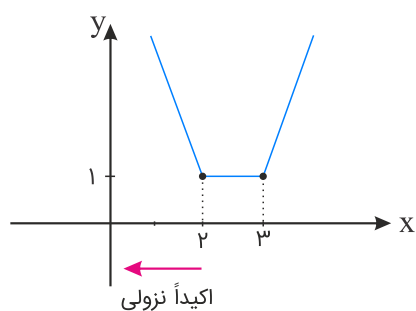
پس $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = 6$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2) - (x-3) = -2x + 5$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = (x-2) - (x-3) = 1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x-2 + x-3 = 2x-5$$



بنابراین:

$$x \leq 2 \Rightarrow -2x + 5 = 2x^2 - x - 10 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$(2x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & \checkmark \\ x = \frac{5}{2} & \times \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

گام اول

ابتدا با استفاده از ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ ، ضابطه $f(x)$ را به دست می آوریم. سپس ضابطه $g(x)$ را تعیین می کنیم و در نهایت برای این که مقدار $g^{-1}(6)$ را محاسبه کنیم، کافی است $g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را حساب کنیم.

گام دوم

توضیحات گفته شده را مرحله به مرحله پیاده می کنیم:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{2x} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2}$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}}$$

$g(x)$ را برابر ۶ قرار داده و مقدار x را تعیین می کنیم:

$$6 = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow 4 + 2 = \frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{2}} \Rightarrow \frac{x^3}{2} = 4 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

نقطه $(2, 6)$ در ضابطه $g(x)$ صدق می کند، پس نقطه $(6, 2)$ متعلق به تابع $g^{-1}(x)$ است. بنابراین $g^{-1}(6) = 2$ است.

گام اول

با توجه به ضابطه تابع که به صورت $y = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ است، محدوده اولیه x را به زیربازه های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می کنیم.

$$-2 \leq x < 0, 0 \leq x < 2, 2 \leq x < 4, 4 \leq x < 6$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$4 \leq x < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل شده است.

راه حل اول:

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$x = 1 \Rightarrow f(-1) = 4 - 14 + 13 = 3$$

فقط در گزینه ۴، $f(-1) = 3$ است.

راه حل دوم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t + 3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t + 3}{2}\right) + 13$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

ابتدا $f(-1)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{2})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2} \Rightarrow f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2 + 1 - 1} = \sqrt{2}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{2})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد، پس حاصل $f(f(-1))$ تعریف نشده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

هر یک از توابع $f + g$ ، $f \circ f$ ، $g \circ f$ و $f \circ g$ را تعیین کرده و در مورد پیوستگی آن در $x = 0$ بحث می کنیم.
بررسی گزینه اول:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - 2x & , x < 0 \\ 1 + 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f + g)(x) = -\frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g)(x) = 1$$

بنابراین تابع $f + g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه دوم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , f(x) < 0 \\ 2f(x) & , f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , x < 0 \\ 4x & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x) = -\frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x) = 0 \rightarrow \text{در } x = 0 \text{ ناپیوسته است}$$

بنابراین تابع $f \circ f$ در $x = 0$ ناپیوسته است.
بررسی گزینه سوم:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = \begin{cases} -2f(x) & , f(x) < 0 \\ 1 & , f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2(-\frac{1}{2}) & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x) = g \circ f(0) = 1$$

پس تابع $g \circ f$ در $x = 0$ پیوسته است.
بررسی گزینه چهارم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , g(x) < 0 \\ 2g(x) & , g(x) \geq 0 \end{cases}$$

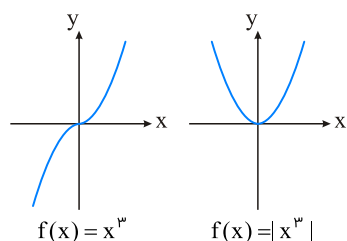
با توجه به ضابطه تابع $g(x)$ این تابع همواره نامنفی است پس تابع $f \circ g$ برای ضابطه بالا تشکیل نشده و داریم:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -2x & , x < 0 \\ 2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ g(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ g(x) = 2$$

بنابراین تابع $f \circ g$ در $x = 0$ ناپیوسته است.

با رسم نمودار تابع $f(x) = |x|^3$ به سؤال پاسخ می‌دهیم. ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور x ها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



با توجه به نمودار رسم‌شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک‌به‌یک هم نیست، در نتیجه وارون‌ناپذیر می‌شود؛ بنابراین فقط گزینه ۳ می‌تواند درست باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۴

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x) \geq 0$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می‌کنیم در چه بازه‌هایی $xf(x) \geq 0$ برقرار است. داریم:

x	-۴	-۳	۰	۱	۲
x	-	-	۰	+	+
f(x)	+	۰	-	-	۰
xf(x)	-	۰	+	-	۰
		ج			ج

دو بازه مشخص شده مقادیر قابل قبول برای دامنه تعریف تابع است، پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $[-۳, ۰] \cup [۱, ۲]$ درمی‌آید.

ابتدا ضابطه تابع gof را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از آن برد تابع gof را تعیین می‌کنیم.

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = 2^{-x+[x]}$$

می‌دانیم به ازای هر x ، $0 \leq x - [x] < 1$ است، بنابراین:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < -x + [x] \leq 0$$

برد تابع gof برابر است با:

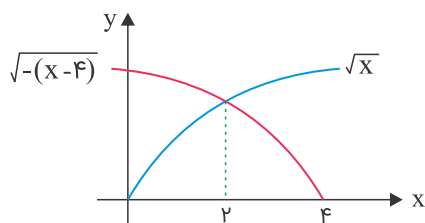
$$-x + [x] = -1 \Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$-x + [x] = 0 \Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^0 = 1 \Rightarrow R_{\text{gof}} = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}} \sqrt{-(x-4)}$$

حال دو نمودار را رسم می‌کنیم:



$$\sqrt{x} = \sqrt{-(x-4)} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |x| = |-(x-4)| = |x-4|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x - 4 \Rightarrow 0 = -4 & \times \\ x = -x + 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین $x = 2$ محور تقارن دو نمودار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

تست ضابطه $f(f(x))$ یا همان $f \circ f(x)$ را از ما می خواهد. برای به دست آوردن ضابطه $f(f(x))$ ، ابتدا باید ضابطه $f(x)$ را به صورت مشخص و دقیق داشته باشیم، سپس باتوجه به آن، ضابطه $f \circ f(x)$ را تعیین کنیم. ضابطه $f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = 2 - |x - 2| = \begin{cases} x \geq 2 : x - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2 - x + 2 = 4 - x \\ x < 2 : x - 2 < 0 \Rightarrow f(x) = 2 + x - 2 = x \end{cases}$$

ضابطه $f(f(x))$ را در هریک از این حالات مشخص می کنیم:

$$x \geq 2 : f(f(x)) = 2 - |4 - x - 2| = 2 - |2 - x|$$

$$\xrightarrow[2-x < 0]{x \geq 2} f(f(x)) = 2 + 2 - x = 4 - x = f(x)$$

$$x < 2 : f(f(x)) = 2 - |x - 2| \xrightarrow[x-2 < 0]{x < 2} 2 + x - 2 = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$$

در هر دو حالت ضابطه $f(f(x))$ برابر ضابطه $f(x)$ شد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

(الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد.

(ب) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند. دامنه تابع $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ محدوده‌ای است که عبارت $x - f^{-1}(x)$ نامنفی می‌شود. پس:

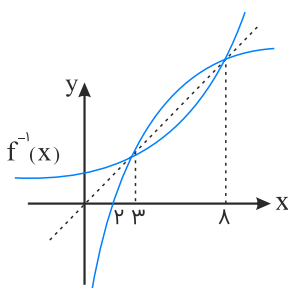
$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y = x$) قرینه هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار می‌گیرد و برعکس.

در بازه $[3, 8]$ نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار

$y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار گرفته و در نتیجه $x - f^{-1}(x)$ مثبت می‌شود (به عبارت $f(x)$)

صحیح‌تر نامنفی می‌شود)، بنابراین بازه $[3, 8]$ دامنه تعریف تابع داده شده است.



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

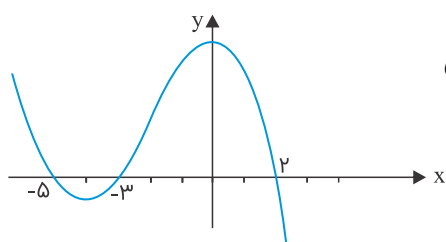
گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq 0$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.

ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-2)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه به نمودار تابع $f(x-2)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل قبول است پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-5, -3] \cup [0, 2]$

گزینه ۱

ابتدا برد تابع اصلی که همان دامنه تعریف تابع وارون است را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون از روی ضابطه تابع اصلی x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x عبارت $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری کرده و ضابطه را تعیین می‌کنیم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{عدد زیر رادیکال با فرجه زوج، مثبت است}} x \geq 1$$

$$\Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-1} \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2] \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$$

اکنون ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 - y \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-1 = (2-y)^2$$

$$\Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2 \Rightarrow x = 5 - 4y + y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5$$

پس ضابطه تابع وارون به صورت $y = x^2 - 4x + 5$; $x \leq 2$ است.

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{مثبت محور } x \text{ ها}]{12 \text{ واحد در جهت}} y = \sqrt{x-12} \xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ ها}]{2 \text{ واحد در جهت}} y = \sqrt{x-12} + 2$$

حال منحنی حاصل را با $f(x) = \sqrt{x}$ برابر قرار می‌دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x-12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-12} = \sqrt{x} - 2$$

$$\xrightarrow[\text{توان } 2]{\quad} x - 12 = x + 4 - 4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Rightarrow x = 16$$

$x = 16$ را در $f(x) = \sqrt{x}$ جایگذاری می‌کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(16) = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow A(16, 4)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16(16+1)} = 4\sqrt{17}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$y = -x$; $x < 0$: نیمساز ناحیه دوم

نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x \Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$f^{-1} = \{(۲, ۱), (\omega, ۲), (۴, ۳), (۶, ۴)\}$$

$$g = \{(۲, ۳), (۴, ۲), (\omega, ۶), (۳, ۱)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ \xrightarrow{g} \times \\ \omega \xrightarrow{f^{-1}} ۲ \xrightarrow{g} ۳ \\ ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۳ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۶ \xrightarrow{f^{-1}} ۴ \xrightarrow{g} ۲ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(\omega, ۳), (۴, ۱), (۶, ۲)\}$$

حال اگر فرض کنیم $h = \text{gof}^{-1}$ باشد، خواسته مسئله $\frac{g}{h}$ است که باید دامنه‌های مشترک را در نظر بگیریم و بردها را بر هم تقسیم کنیم:

$$D_h \cap D_g = \{\omega, ۴\}$$

$$\frac{g}{h} = \left\{ \left(\omega, \frac{۶}{۳} \right), \left(۴, \frac{۲}{۱} \right) \right\} = \{(\omega, ۲), (۴, ۲)\}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

ابتدا با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ ، ضابطه دو تابع $f(1+x)$ و $f(1-x)$ را تشکیل می‌دهیم. یعنی یک بار در ضابطه $f(x)$ به جای متغیر x ، متغیر $(1+x)$ و یک بار متغیر $(1-x)$ را قرار داده و ضابطه هر یک را تعیین می‌کنیم.

$$f(1+x) = (1+x)^۲(۲-1-x)^۲ = (1+x)^۲(1-x)^۲ = [(1+x)(1-x)]^۲ = (1-x^۲)^۲$$

$$f(1-x) = (1-x)^۲(۲-1+x)^۲ = (1-x)^۲(1+x)^۲ = [(1-x)(1+x)]^۲ = (1-x^۲)^۲$$

با داشتن ضوابط دو تابع $f(1+x)$ و $f(1-x)$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(1+x) - f(1-x) = (1-x^۲)^۲ - (1-x^۲)^۲ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

اول ضابطه $f(\sqrt{x})$ را تعیین می‌کنیم. در تعیین ضابطه $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنه آن متفاوت با دامنه تابع $f(x)$ است.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

حالا ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow g(x) = 2, \quad x \in (0, +\infty)$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

با توجه به ضابطه $f(x)$ ، ابتدا $f(-144)$ و سپس $f(f(-144))$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x + 2|x|} \Rightarrow f(-144) = \sqrt{-144 + 2|-144|} \\ = \sqrt{-144 + 288} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow f(-144) = 12$$

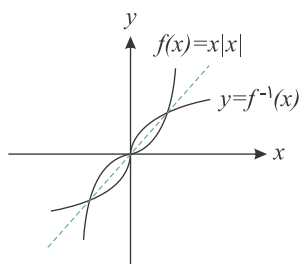
حالا $f(12)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12 + 2|12|} = \sqrt{12 + 24} = \sqrt{36} = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. نمودار f^{-1} قرینه $f(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

برای به دست آوردن D_{fog} اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطه $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ دامنه تابع fog را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_v^{(x^v+2x)} \Rightarrow x^v + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین D_{fog} می رویم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \mid \log_v^{(x^v+2x)} \leq 3\}$$

$$\log_v^{(x^v+2x)} \leq 3 \Rightarrow x^v + 2x \leq v^3 \Rightarrow x^v + 2x \leq 8 \Rightarrow x^v + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{fog} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

اصلاً نیازی به تعیین ضابطه $g(x)$ نداریم. با داشتن ضابطه دو تابع $f(x)$ و $f(g(x))$ ، ضابطه تابع $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ تشکیل می دهیم. سپس x را برابر ۱ قرار داده و مقدار $g(1)$ را محاسبه می کنیم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad fog(x) = f(g(x)) = \frac{x^v+2}{x^v+1} \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^v+2}{x^v+1}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{1+2}{1+1} \Rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1)+2 = 3g(1)-3$$

$$\Rightarrow g(1) = 3+2 = 5 \Rightarrow g(1) = 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتب‌ها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع بودن در حل این گونه سؤال‌ها فراموش نشود. این که زوج مرتب‌ها نباید مؤلفه اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه‌های دوم هم برابر شود.

در رابطه داده شده دو زوج مرتب $(3, 2)$ و $(3, a^2 - a)$ مشاهده می‌شود. برای این که رابطه در وهله اول یک تابع باشد، باید مؤلفه‌های دوم با هم برابر باشند:

$$a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می‌شود:

$$a = -1 \Rightarrow (-1, 5) \in f, (-1, 4) \in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a = 2$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$(3, 2) \in f, (b, 2) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f \text{ یک به یک است}} b = 3$$

پس دوتایی (a, b) به صورت $(2, 3)$ درمی‌آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

در صورت مسئله ضابطه دو تابع $f(x)$ و $g(f(x))$ به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع $f \circ g$ کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

$$f(x) = 2x + 3, g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \Rightarrow g(2x + 3) = 8x^2 + 22x + 20$$

$$2x + 3 = t \Rightarrow 2x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t - 3}{2}$$

$$g(t) = 8\left(\frac{t - 3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t - 3}{2}\right) + 20 \Rightarrow g(t) = 8\left(\frac{t^2 - 6t + 9}{4}\right) + 11(t - 3) + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

حالا ضابطه تابع $f \circ g(x)$ یا همان $f(g(x))$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = 2x + 3, g(x) = 2x^2 - x + 5 \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 2x + 10 + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ از ما خواسته شده است. ابتدا باید ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین کنیم، سپس به جای متغیر x نسبت مثلثاتی $\sin x$ را قرار داده و در پایان ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ را به دست آوریم.

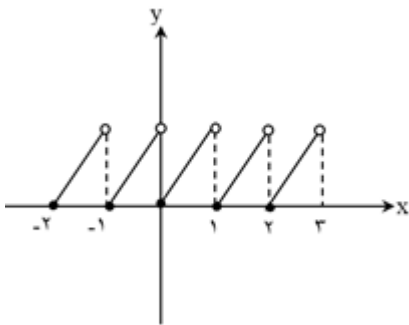
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &\Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y\sqrt{1+x^2} = x \\ \xrightarrow{\text{به توان } 2} y^2(1+x^2) &= x^2 \Rightarrow y^2 + y^2x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - y^2x^2 = y^2 \\ \Rightarrow x^2(1-y^2) &= y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \xrightarrow{\text{هم علامت } y, x} x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} ; -1 < x < 1 \end{aligned}$$

ضابطه $f^{-1}(\sin x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sin x) &= \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \xrightarrow{1-\sin^2 x = \cos^2 x} f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} \\ \Rightarrow f^{-1}(\sin x) &= \frac{\sin x}{|\cos x|} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

برای رسم نمودار تابع، محدوده اولیه x را به پنج زیربازه زیر تقسیم می‌کنیم:



$$-2 \leq x < -1, -1 \leq x < 0, 0 \leq x < 1, 1 \leq x < 2, 2 \leq x < 3$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - (-2) = x + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - (-1) = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - (1) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - (2) = x - 2$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازه $\sqrt{2}$ تشکیل شده است. پس دوتایی مرتب (n, L) به صورت $(5, \sqrt{2})$ می‌شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

تابع معکوس تابع g عبارت است از:

$$g^{-1} = \{(-1, 2), (4, -1), (-2, 3), (-3, -4)\}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیر $x > 0$ مثبت و به ازای مقادیر $x < 0$ منفی است، پس a قطعاً عددی منفی است.

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow a = -4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

در تابع f و g به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به ما داده شده و تابع $g \circ f^{-1}$ را می‌خواهند، پس ابتدا باید تابع f^{-1} را با زوج مرتب‌هایش تشکیل دهیم. برای این کار کافی است در تمامی زوج مرتب‌های تابع f ، جای مؤلفه های اول و دوم را باهم عوض کنیم. پس باتوجه به دامنه تعریف تابع $f^{-1}(x)$ و زوج مرتب‌های تابع $g(x)$ تابع $g \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

برای حل تست اول باید f^{-1} را مشخص کنیم:

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\} \\ \Rightarrow D_{f^{-1}} = \{2, 5, 3, -1\}$$

حالا بررسی می‌کنیم برای هریک از اعضای $D_{f^{-1}}$ ، تابع $g \circ f^{-1}$ تعریف می‌شود یا خیر:

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g(f^{-1}(2)) = g(1) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \Rightarrow (5, 3) \in g \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 0 \Rightarrow g(f^{-1}(3)) = g(0) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = 4 \Rightarrow g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 1 \Rightarrow (-1, 1) \in g \circ f^{-1}$$

بنابراین تابع $g \circ f^{-1}$ به صورت $\{(5, 3), (-1, 1)\}$ درمی‌آید.

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غ.ق.ق} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g : [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} : \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\}$$

همواره داریم $1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ، در نتیجه:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$$

از طرف دیگر وقتی $n > 2$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$$

پس حاصل عبارت داده شده به ازای $n > 2$ برابر است با:

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 2n-1 - 2n+4 = 3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A = [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] \xrightarrow{n=3} A = [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}]$$

$$= [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 5 - 2 = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

دو تابع $g(x)$ و $(fog)(x)$ را داریم. می‌دانیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \Rightarrow f(2x+1) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \quad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم $2x+1 = t$ باشد، x را برحسب t به دست آورده و در ضابطه (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$\begin{aligned} 2x+1 &= t \Rightarrow 2x = t-1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \\ f(2x+1) &= \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \Rightarrow f(t) = \lambda \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + \epsilon \left(\frac{t-1}{2}\right) + \omega \\ &= 2(t-1)^2 + 3t - 3 + \omega \\ \Rightarrow f(t) &= 2(t^2 - 2t + 1) + 3t + 2 = 2t^2 - 4t + 2 + 3t + 2 = 2t^2 - t + 4 \end{aligned}$$

بنابراین ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + 4$ به صورت $f(x) = 2x^2 - x + 4$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

دامنه تابع معکوس $(D_{f^{-1}})$ همان برد تابع اصلی (R_f) است. بنابراین برای تعیین دامنه تعریف تابع معکوس، باید برد تابع اصلی را به دست آوریم. بعد از تعیین $D_{f^{-1}}$ ، ضابطه تابع معکوس را مشخص می‌کنیم. برای یافتن ضابطه تابع معکوس از رابطه $y = f(x)$ را برحسب y به دست آورده و در نهایت جای x و y را عوض بنابراین ضابطه تابع معکوس به صورت $y = f^{-1}(x)$ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 > x^2 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \\ \xrightarrow{|x|=\pm x} \sqrt{x^2 + 1} > -x &\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} + x > 0 \xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x^2+1}} f(x) > 0 \\ \Rightarrow R_f &= (0, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty) \end{aligned}$$

دامنه تابع معکوس به صورت $x > 0$ در می‌آید.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1} \\ \xrightarrow{\text{به توان } 2} (y-x)^2 &= x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy = 1 \\ \Rightarrow 2xy &= y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right), x > 0 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

به شکل ماشین داده شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را x در نظر می گیریم. وارد دستگاهی می شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به صورت زیر تکمیل می کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_x \rightarrow \underbrace{2x - 2}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x} + 1}}_{g(x)} \rightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی x برابر $\frac{4}{3}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{4}{3}$ است.

گام دوم

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و در نهایت مقدار x را محاسبه کنیم:

$$f(x) = 2x - 2, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2} + 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(2x - 2) = 4\sqrt{2x - 2} + 4$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2x-2}=t} 3t^2 = 4t + 4 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 4 = 0 \Rightarrow (3t + 2)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \sqrt{2x-2} = 2 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2x-2} = -\frac{2}{3} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x = 3$ به دست آمد.

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفه اول آن‌ها باهم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم باهم برابر باشند.

$$A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$$

$$(3, m^2), (3, m+2) \in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

مقادیر به‌دست‌آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m = 2 \Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(2, 4)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m = -1 \Rightarrow A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m = -1$ تنها مقدار قابل قبول برای m است.

گام اول

معکوس تابع نمایی $y = 2^x$ ، تابع لگاریتمی $y = \log_2^x$ است. نقطه برخورد این دو تابع با محورهای A و B نام گذاری کرده و فاصله دو نقطه را محاسبه می کنیم.

گام دوم

روش اول:

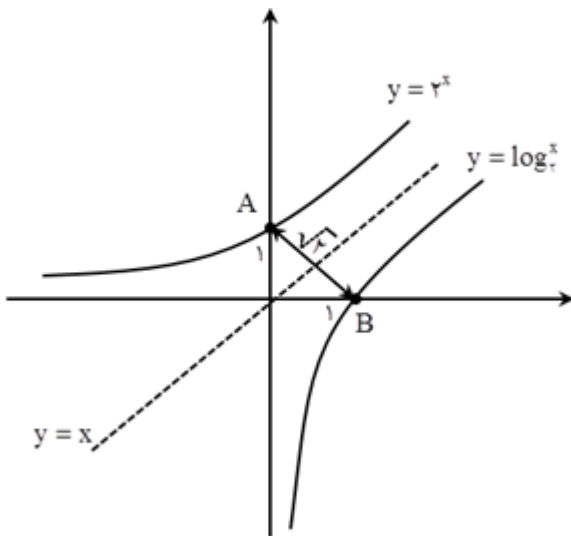
$$y = 2^x \xrightarrow[\text{برخورد با محور } y]{x=0} y = 2^0 = 1$$

پس نقطه برخورد تابع $y = 2^x$ با محور y ها نقطه $A(0, 1)$ است. نقطه برخورد تابع معکوس یا همان $y = \log_2^x$ با محور x ها نقطه $B(1, 0)$ است. فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

روش دوم:

با توجه به اینکه معکوس هر نمودار را می توانیم با رسم تقارن آن نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم، نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کرده و با ترسیم وارون آن نسبت به خط $y = x$ نمودار تابع معکوس را به دست می آوریم.



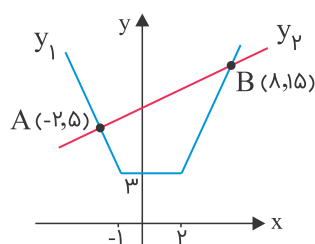
$$y_1 = |x - 2| + |x + 1|, \quad y_2 = x + 7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x + 2 - x - 1 & ; x \leq -1 \\ -x + 2 + x + 1 & ; -1 < x \leq 2 \\ x - 2 + x + 1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \leq -1 \\ 3 & ; -1 < x \leq 2 \\ 2x - 1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$x > 2 : 2x - 1 = x + 7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1 : -2x + 1 = x + 7 \Rightarrow x = -2$$

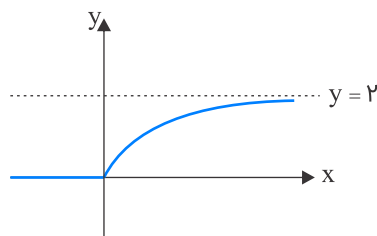


$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} \\ = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + |x|}{|x + 1| + 1} = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{2x}{x + 2} & ; x > 0 \end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.



پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[0, 2)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

راه حل اول: ابتدا وارون تابع $g(x)$ را بر حسب وارون تابع $f(x)$ تعیین کرده، سپس مقدار $g^{-1}(16)$ را محاسبه می کنیم. تابع $g(x)$ را برابر y در نظر می گیریم. داریم:

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow y = f(3x - 4)$$

اگر تساوی $g(x) = y$ را داشته باشیم، می توان نتیجه گرفت $g^{-1}(y) = x$ است. با استفاده از همین نتیجه و وارون کردن دو طرف تساوی ضابطه تابع $g^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} y = f(3x - 4) &\Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(3x - 4)) = f^{-1}(y) = 3x - 4 \\ \Rightarrow 3x = f^{-1}(y) + 4 &\Rightarrow x = \frac{f^{-1}(y) + 4}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x) + 4}{3} \end{aligned}$$

حالا برای به دست آوردن مقدار $g^{-1}(16)$ ابتدا مقدار $f^{-1}(16)$ را حساب می کنیم:

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x} \xrightarrow{x=16} f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 16 + 4 = 20$$

$$g^{-1}(16) = \frac{20 + 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

راه حل دوم: فرض می کنیم $g^{-1}(16) = a$ ، پس داریم: $g(a) = 16$

$$g(x) = f(3x - 4) \Rightarrow g(a) = f(3a - 4) = 16 \Rightarrow f^{-1}(16) = 3a - 4$$

$$f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20 = 3a - 4 \Rightarrow a = \frac{24}{3} = 8$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

$$f(6) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = 6 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می کنیم:

$$x - \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t + 2) = 0 \xrightarrow{t>0} t = 3 \xrightarrow{x=t^2} x = 9$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \xrightarrow{x=t^2} x = \frac{1}{4}$$

بنابراین نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را در نقاطی به طول ۹ و $\frac{1}{4}$ قطع می کند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

دقت کنید که x و y فقط باید مقادیر صحیح بپذیرند.

گام دوم

با توجه به این که $|x|$ و $|y|$ مقادیر نامنفی هستند، حالت های زیر برای $|x|$ و $|y|$ می تواند رخ دهد:

$$۱) |x| = ۲, |y| = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲, y = ۰ \Rightarrow (۲, ۰), (-۲, ۰) \in R$$

$$۲) |x| = ۰, |y| = ۲ \Rightarrow x = ۰, y = \pm ۲ \Rightarrow (۰, ۲), (۰, -۲) \in R$$

$$۳) |x| = ۱, |y| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱, y = \pm ۱ \Rightarrow (۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱) \in R$$

بنابراین رابطه R با اعضایش به صورت زیر در می آید:

$$R = \{(۲, ۰), (۰, ۲), (-۲, ۰), (۰, -۲), (۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱)\}$$

پس رابطه R دارای ۸ عضو به صورت زوج مرتب است.

گام اول

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار $f(۳)$ را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید درست است ولی زمان حل مسئله طولانی تر می شود.) ضابطه $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. حال ما مقدار $f(۳)$ را می خواهیم. کافی است $g(x)$ را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای x به دست آمده، مقدار $f(۳)$ محاسبه می شود.

گام دوم

$$g(x) = 2x - 1, f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-3}$$

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{x=2} f(3) = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

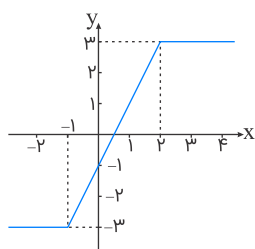
X	-۱	۲
X+۱	-	+
X-۲	-	+

$$x \leq -1 : f(x) = -x - 1 + x - 2 = -3$$

$$-1 < x \leq 2 : f(x) = x + 1 + x - 2 = 2x - 1$$

$$x > 2 : f(x) = x + 1 - x + 2 = 3$$

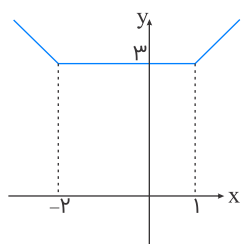
نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصله $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$f(x) = |x+2| + |x-1| = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 1 \\ 3 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ -2x-1 & ; x < -2 \end{cases}$$



باتوجه به نمودار تابع گلدانی $y = |x+2| + |x-1|$ ، در فاصله $(-\infty, -2)$ تابع نزولی اکید است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

راه حل اول:

اگر تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f(x) = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5$ تبدیل می شود و اگر تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت y های منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطه $g(x) = f(x) - 2$ خواهد بود.

$$g(x) = f(x) - 2 = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 5 - 2$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 3 = -x^2 + 8x - 12$$

حال باید $g(x)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y = x$ قرار گیرد.

$$g(x) > x \Rightarrow -x^2 + 8x - 12 > x$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow \underbrace{(x-3)(x-4)}_{h(x)} < 0 \quad (*)$$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
h(x)	+	$\circ$	-	$\circ$	+

$$h(x) < 0 \Rightarrow x \in (3, 4)$$

راه حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در $(*)$ قرار دهیم: $x = 4$ ، داریم: $0 < 0$ که غیرقابل قبول است، بنابراین گزینه های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸