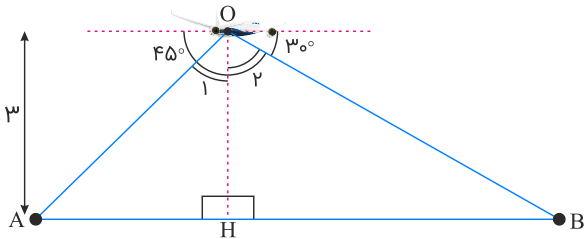




گزینه ۳

۱

به شکل زیر دقت کنید.



واضح است که:  $\widehat{O}_1 = 45^\circ$  و  $\widehat{O}_2 = 60^\circ$ .  
حالا در مثلث OAH داریم:

$$\tan \widehat{O}_1 = \frac{AH}{OH} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = 3$$

به طریق مشابه در مثلث OBH داریم:

$$\tan \widehat{O}_2 = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{BH}{3} \Rightarrow BH = 3\sqrt{3}$$

پس:

$$\text{فاصله بین دو جزیره} = AB = AH + BH = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3}) \simeq 3(2/7) = 8/1$$

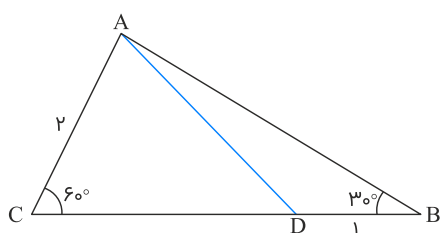
چون مساحت مثلث ABC برابر است با  $۲\sqrt{۳}$ ، می‌توان طول CD را پیدا کرد:

$$\frac{1}{۲} AC \cdot BC \cdot \sin ۶۰^\circ = \frac{1}{۲} (۲)(۱ + CD) \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow CD = ۳$$

درنتیجه مساحت مثلث ACD برابر است با:

$$\frac{1}{۲} AC \cdot CD \cdot \sin ۶۰^\circ = \frac{1}{۲} (۲)(۳) \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$۲\sqrt{۳} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ برابر است با:}$$



می‌دانیم  $\frac{1}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x$  است، پس داریم:

$$\begin{aligned} ۱ + \tan^۲ x + \tan^۴ x - (۱ + \tan^۲ x)^۲ \\ = ۱ + \tan^۲ x + \tan^۴ x - (۱ + \tan^۴ x + ۲\tan^۲ x) = -\tan^۲ x \end{aligned}$$

تذکر: دانش‌آموزان عزیز، به صورت‌های دیگری نیز می‌توانند حاصل عبارت داده‌شده را مشخص نمایند.

$$S = \frac{1}{۲} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} \Rightarrow ۸\sqrt{۵} = \frac{1}{۲} \times ۴ \times ۱۰ \times \sin \hat{B} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

با داشتن  $\sin \hat{B}$ ، مقدار  $\cot \hat{B}$  را حساب می‌کنیم:

$$۱ + \cot^۲ \hat{B} = \frac{1}{\sin^۲ \hat{B}} \Rightarrow ۱ + \cot^۲ \hat{B} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \cot \hat{B} = \pm \frac{1}{۲}$$

از آنجایی که BC بزرگ‌ترین ضلع است، پس زاویه A بزرگ‌ترین زاویه است و B نمی‌تواند منفرجه باشد و درنتیجه

$$\cot \hat{B} = \frac{1}{۲} \text{ حتماً مثبت است:}$$

داخل رادیکال اتحاد مربع است:

$$\sqrt[4]{\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1} = \sqrt[4]{(\tan^2 x + 1)^2} = \sqrt{\tan^2 x + 1}$$

حالا از اتحاد  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{\tan^2 x + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \underbrace{\frac{1}{|\cos x|}}_{\text{ربع چهارم: } \cos x > 0} = \frac{1}{\cos x}$$

عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$4\sin^2 60^\circ - 3\sin^2 x = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\sin^2 x = 3(1 - \sin^2 x) = 3\cos^2 x$$

پس:

$$\sqrt{\tan^4 x + 2\tan^2 x + 1} \times (4\sin^2 60^\circ - 3\sin^2 x) = \frac{1}{\cos x} \times 3\cos^2 x = 3\cos x$$

$$\begin{aligned} 4(\sin^4 x - \sin^2 x)(\tan x + \cot x) &= 1 \\ \Rightarrow 4\sin^2 x(\sin^2 x - 1)\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) &= 1 \\ \Rightarrow 4\sin^2 x(-\cos^2 x)\left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right) &= 1 \\ \Rightarrow -4\sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \cos x &= \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

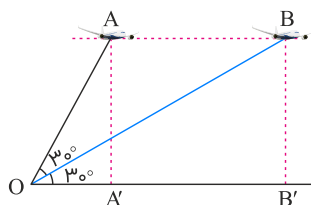
عبارت خواسته شده را مساوی A قرار می‌دهیم و  $A^2$  را به دست می‌آوریم:

$$A = |\sin x - \cos x| \Rightarrow A^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2\sin x \cos x}_{\frac{-1}{2}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{3}{2} \xrightarrow{A > 0} A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

به شکل زیر توجه کنید:

در مثلث  $OAA'$  داریم:



$$\tan 60^\circ = \frac{AA'}{OA'} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5}{OA'} \Rightarrow OA' = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

در مثلث  $OBB'$  هم داریم:

$$\tan 30^\circ = \frac{BB'}{OB'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{OB'} \Rightarrow OB' = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

پس:

$$A'B' = OB' - OA' = \frac{15}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

پس درواقع هواپیما مسافت  $\frac{10}{\sqrt{3}}$  کیلومتر را با سرعت  $\sqrt{3}$  کیلومتر بر دقیقه طی کرده است. مطابق رابطه  $x = Vt$  داریم:

$$\frac{10}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}t \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}t \Rightarrow t = \frac{10}{3}$$

$$\sin x - \tan x > 0 \Rightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} > 0 \Rightarrow \frac{\sin x \overbrace{(\cos x - 1)}^{\text{منفی}}}{\cos x} > 0$$

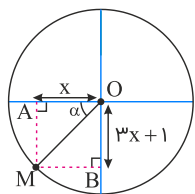
$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \tan x < 0 \Rightarrow x \text{ در ربع ۲ یا ۴}$$

$$\cos x + 2 \cot x < 0 \Rightarrow \cos x + \frac{2 \cos x}{\sin x} < 0 \Rightarrow \frac{\cos x \overbrace{(\sin x + 2)}^{\text{مثبت}}}{\sin x} < 0$$

$$\Rightarrow \cot x < 0 \Rightarrow x \text{ در ربع ۲ یا ۴}$$

از اشتراک دو شرط بالا می فهمیم که  $x$  در ناحیه ۲ یا ۴ است.

به شکل زیر دقت کنید (حواسمان باشد تانژانت زاویه  $\alpha$  شکل با تانژانت زاویه صورت سؤال برابر است).



طبق رابطه فیثاغورس در مثلث OMB داریم:

$$(MB)^2 + (OB)^2 = (OM)^2 \xrightarrow{OM=R=1} x^2 + (3x+1)^2 = 1$$

$$x^2 + 9x^2 + 6x + 1 = 1 \Rightarrow 10x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(5x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{غیرقابل قبول}$$

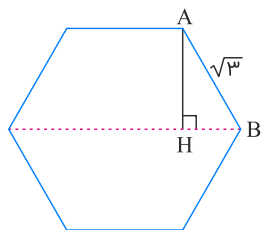
پس:

$$\begin{cases} \cos \alpha = x = \frac{-3}{5} \\ \sin \alpha = 3x + 1 = 3\left(\frac{-3}{5}\right) + 1 = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

و در نتیجه:

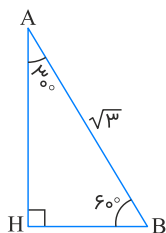
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{4}{3}$$

شکل زیر را ببینید:



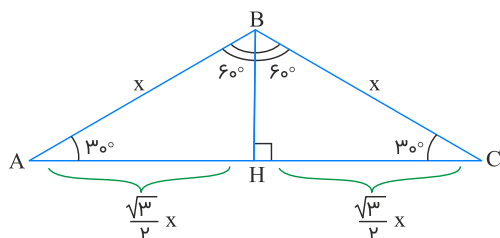
هدف مسئله درواقع پیدا کردن طول AH است.

می‌دانیم اندازه هر یک از زوایای داخلی یک شش ضلعی منتظم برابر با  $120^\circ$  است، پس در مثلث AHB داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{2} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}$$

چون زوایای A و C باهم برابرند، پس مثلث ABC متساوی الساقین است ( $AB = BC$ ). حال طول دو ساق را برابر x می‌گیریم. به کمک رسم ارتفاع BH، اندازه ضلع AC را برحسب x حساب می‌کنیم، داریم:



$$\triangle BCH : \cos 30^\circ = \frac{HC}{x} \Rightarrow HC = \frac{\sqrt{3}}{2}x \xrightarrow{\times 2} AC = 2HC = \sqrt{3}x$$

محیط مثلث ABC،  $6 + 4\sqrt{3}$  است، پس داریم:

$$x + x + x\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})x = 6 + 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

حالا مساحت مثلث را حساب می‌کنیم. داریم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \underset{\downarrow x}{AB} \times \underset{\downarrow x}{BC} \times \underbrace{\sin \hat{B}}_{\sin 120^\circ} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

نکته: اگر خط  $d$  با جهت مثبت محور  $x$  ها، زاویه  $\theta$  بسازد، آنگاه:

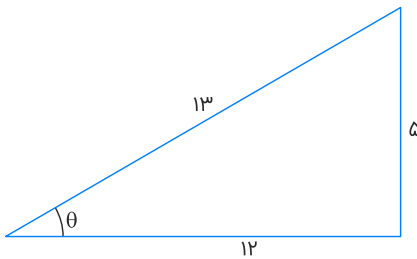
$$\text{شیب خط} = \tan \theta \quad (0^\circ \leq \theta < 180^\circ)$$

شیب خط داده شده را حساب می‌کنیم:

$$5x + 12y - 1 = 0 \Rightarrow y = \underbrace{\frac{-5}{12}}_{\text{شیب}} x + \frac{1}{12}$$

پس  $\tan \theta = \frac{-5}{12}$  و  $\theta$  در ربع دوم قرار دارد.

مقدار  $\sin \theta$  و  $\cos \theta$  را به کمک مثلث قائم‌الزاویه که تانژانت یکی از زوایای آن  $\frac{5}{12}$  است، به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{5}{13} \xrightarrow[\sin \theta > 0]{\text{ربع دوم}} \sin \theta = \frac{5}{13} \\ \cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{12}{13} \xrightarrow[\cos \theta < 0]{\text{ربع دوم}} \cos \theta = \frac{-12}{13} \end{cases}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{5}{13} - \left(\frac{-12}{13}\right) = \frac{17}{13} \text{ پس:}$$

عبارتی که به عنوان فرض داده شده است و عبارت خواسته شده، مزدوج یکدیگرند، پس حاصل ضرب آن ها را محاسبه می‌کنیم. اگر  $\cot x - \frac{1}{\sin x}$  را  $A$  فرض کنیم، داریم:

$$\left(\cot x + \frac{1}{\sin x}\right)\left(\cot x - \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{2}{3}A \Rightarrow \cot^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2}{3}A$$

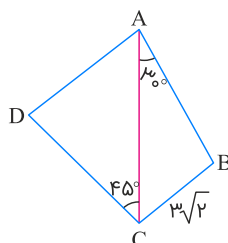
باتوجه به فرمول  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ، داریم:

$$\xrightarrow{1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}} \cancel{\cot^2 x} - (1 + \cancel{\cot^2 x}) = \frac{2}{3}A \Rightarrow -1 = \frac{2}{3}A \Rightarrow A = \frac{-3}{2} = -1/5$$

$$\xrightarrow{A = -1/5} \cot x - \frac{1}{\sin x} = -1/5$$

دو مثلث  $ABC$  و  $ACD$ ، یک ضلع مشترک دارند که روبه‌رو به دو زاویهٔ مکمل چهار ضلعی است. بنابراین قضیهٔ سینوس‌ها را در این دو مثلث نوشته و طرفین رابطه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم:

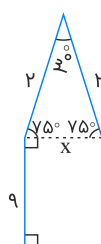
$$(\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \sin \hat{B} = \sin \hat{D})$$



$$\begin{cases} \triangle ABC : \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin 30^\circ} \\ \triangle ACD : \frac{AC}{\sin \hat{D}} = \frac{AD}{\sin 45^\circ} \end{cases} \xrightarrow[\sin \hat{B} = \sin \hat{D}]{\div} 1 = \frac{BC \cdot \sin 45^\circ}{AD \cdot \sin 30^\circ}$$

$$\Rightarrow BC \cdot \sin 45^\circ = AD \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = AD \times \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 6$$

ابتدا شکل زیر را ببینید و به زوایای محاسبه‌شده دقت کنید.  
باید مساحت مثلث متساوی‌الساقین و مستطیل را حساب کنیم:



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}(2)(2) \sin 30^\circ = 1$$

برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل، ابتدا باید طول ضلع دیگر آن را محاسبه کنیم؛ کافی است در مثلث متساوی‌الساقین، قضیهٔ سینوس‌ها را بنویسیم:

$$\frac{\sin 30^\circ}{x} = \frac{\sin 75^\circ}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\sin 75^\circ}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{\sin 75^\circ}$$

پس:

$$S_{\text{مستطیل}} = 2 \times \frac{2}{\sin 75^\circ} = 4 \times \frac{1}{\sin 75^\circ} = 10$$

و لذا:

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{مثلث}} + S_{\text{مستطیل}} = 1 + 10 = 11$$