



$$4 \sin(x - \omega\pi) - \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = 2$$

$$4 \sin(x + \pi - \underbrace{\frac{6\pi}{2}}_{\text{قابل حذف}}) - \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = 2 \Rightarrow 4 \sin(x + \pi) - \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = 2$$

$$\Rightarrow -4 \sin x - \sin x = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{-2}{5}$$

عبارتی که سؤال می‌خواهد را ساده می‌کنیم:

$$\tan(x - \frac{3\pi}{2}) = -\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cot x$$

حالا با داشتن $\sin x = \frac{-2}{5}$ ، مقدار $-\cot x$ را حساب می‌کنیم:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \cot^2 x = \frac{1}{(\frac{-2}{5})^2}$$

$$\Rightarrow \cot^2 x = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4} \xrightarrow{\cot \text{ در ربع سوم مثبت است}} \cot x = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

پس:

$$\tan(x - \frac{3\pi}{2}) = -\cot x = \frac{-\sqrt{21}}{2}$$

باتوجه به خاصیت تابع کسینوس، می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin(3\alpha + 4\beta)}{\cos(-6\alpha - 7\beta)} = \frac{\sin(3\alpha + 4\beta)}{\cos(6\alpha + 7\beta)}$$

حالا سعی می‌کنیم با استفاده از رابطه $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ ، کمان‌های جلوی سینوس و کسینوس را ساده‌تر کنیم:

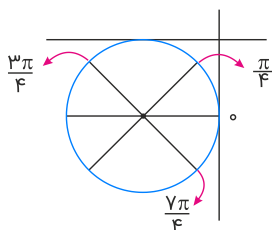
$$۱) 3\alpha + 4\beta = 3\alpha + 3\beta + \beta = 3(\alpha + \beta) + \beta = 3\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta = \frac{\pi}{2} + \beta$$

$$۲) 6\alpha + 7\beta = 6\alpha + 6\beta + \beta = 6(\alpha + \beta) + \beta = 6\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta = \pi + \beta$$

پس داریم:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi + \beta)} = \frac{\cos \beta}{-\cos \beta} = -1$$

باتوجه به دایره مثلثاتی در بازه‌های $(0, \frac{3\pi}{4})$ و $(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ ، مجموع سینوس و کسینوس مثبت است. در این دو بازه در بازه‌های $(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ و $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ، تانژانت از کتانژانت بزرگ‌تر است. پس:



$$(a, b) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), (c, d) = \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \Rightarrow \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

مقدار هریک از نسبت‌های مثلثاتی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 ۱) \cos\left(\frac{-۱۹\pi}{۶}\right) &= \cos\left(\frac{۱۹\pi}{۶}\right) = \cos\left(\frac{۱۸\pi + \pi}{۶}\right) \\
 &= \cos\left(۳\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\
 ۲) \tan\left(\frac{-۱۱\pi}{۴}\right) &= -\tan\left(\frac{۱۱\pi}{۴}\right) = -\tan\left(\frac{۱۰\pi + \pi}{۴}\right) \\
 &= -\tan\left(۲\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱ \\
 ۳) \sin\left(\frac{۴۶\pi}{۶}\right) &= \sin\left(\frac{۲۳\pi}{۳}\right) = \sin\left(\frac{۲۴\pi - \pi}{۳}\right) \\
 &= \sin\left(۸\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}
 \end{aligned}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times -۱}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = -۱$$

هر ۴ عبارت مثلثاتی داده‌شده را بر حسب یک نسبت از زاویه $\frac{\pi}{\lambda}$ می‌نویسیم:

- $\sin\left(\frac{-\omega\pi}{\lambda}\right) = -\sin\frac{\omega\pi}{\lambda} = -\sin\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{\lambda}\right) = -\cos\frac{\pi}{\lambda}$
- $\cos\left(\frac{۲\omega\pi}{\lambda}\right) = \cos\left(۲\pi + \frac{\pi}{\lambda}\right) = \cos\frac{\pi}{\lambda}$
- $\tan\left(\frac{۱\omega\pi}{\lambda}\right) = \tan\left(۲\pi - \frac{\pi}{\lambda}\right) = -\tan\frac{\pi}{\lambda}$
- $\tan\left(\frac{۲۷\pi}{\lambda}\right) = \tan\left(۳\pi + \frac{\pi}{\lambda}\right) = \tan\frac{\pi}{\lambda} = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{\lambda}\right) = \cot\frac{\pi}{\lambda}$

پس:

$$\begin{aligned}
 A &= \sin\left(\frac{-\omega\pi}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{۲\omega\pi}{\lambda}\right) + \tan\left(\frac{۱\omega\pi}{\lambda}\right) \tan\left(\frac{۲۷\pi}{\lambda}\right) \\
 &= \left(-\cos\frac{\pi}{\lambda}\right) \left(\cos\frac{\pi}{\lambda}\right) + \left(-\tan\frac{\pi}{\lambda}\right) \left(\cot\frac{\pi}{\lambda}\right) \\
 \Rightarrow A &= \cos^۲\frac{\pi}{\lambda} - ۱ = -(1 - \cos^۲\frac{\pi}{\lambda}) = -\sin^۲\frac{\pi}{\lambda}
 \end{aligned}$$

دامنه تابع $f(x) = \frac{-1}{[x] + [-x]}$ برابر $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ است. چرا که $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ و مخرج نمی‌تواند صفر باشد. اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $f(x) = \frac{-1}{-1} = 1$ است. از طرفی می‌دانیم: $g(x) = \tan x \times \cot x = 1$ است. پس فقط باید دامنه دو تابع برابر باشد. دامنه $g(x)$ هم باید برابر $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ شود:

$$g(x) = \tan ax \times \cot ax = \frac{\sin ax}{\cos ax} \times \frac{\cos ax}{\sin ax} \Rightarrow \sin ax \times \cos ax = 0$$

$$ax = \frac{k\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2a}$$

اگر بخواهیم دامنه f و g برابر باشد، باید:

$$\frac{k\pi}{2a} = k \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$$

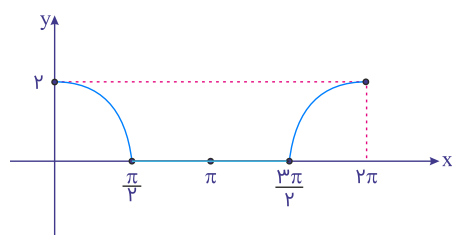
برای رسم نمودار، باید تکلیف $\cos x$ داخل قدر مطلق را به لحاظ علامتی معلوم کنیم:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos x \Rightarrow f(x) = \cos x + \cos x = 2 \cos x$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow f(x) = \cos x - \cos x = 0$$

$$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow 0 < \cos x \Rightarrow f(x) = \cos x + \cos x = 2 \cos x$$

پس نمودار تابع به این صورت خواهد بود:



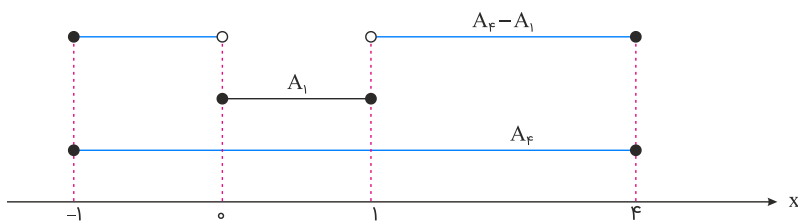
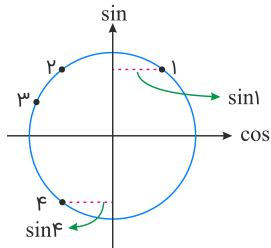
واضح است که نمودار فقط شامل یک پاره‌خط است.

باید جای ۱ و ۴ رادیان را در دایرهٔ مثلثاتی بدانیم. داریم:

$$A_1 = [[\sin 1], 1] \xrightarrow{0 < \sin 1 < 1} A_1 = [0, 1]$$

$$A_4 = [[\sin 4], 4] \xrightarrow{-1 < \sin 4 < 0} A_4 = [-1, 4]$$

$$A_4 - A_1 = [-1, 4] - [0, 1] = [-1, 0) \cup (1, 4]$$

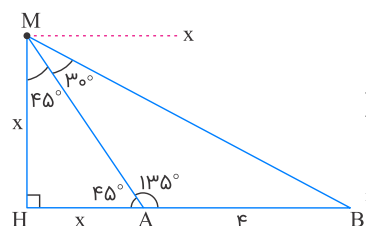


$$\sin 510^\circ \cos 660^\circ + \sin \frac{11\pi}{3} \cos \frac{17\pi}{6} = \sin(360^\circ + 90^\circ + 60^\circ) \cos(720^\circ - 60^\circ)$$

$$+ (-\sin \frac{\pi}{3})(-\cos \frac{\pi}{6}) = (\cos 60^\circ)(\cos 60^\circ) + (-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1$$

از نقطه M بر امتداد AB عمود می‌کنیم. طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم: $\hat{MAH} = \hat{AMx} = 45^\circ$ و در نتیجه $\hat{AMB} = 135^\circ$ و $\hat{AMH} = 45^\circ$. بنابراین $AH = MH = x$ کافی است طول MB را حساب کنیم تا با قضیه فیثاغورس مقدار x به دست آید. با استفاده از رابطه محاسبه مساحت مثلث MAB داریم:



$$\Delta MAB : S = \frac{1}{2} AM \cdot MB \cdot \sin \hat{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot AB \cdot \sin \hat{MAB}$$

$$\Rightarrow MB \cdot \sin \hat{AMB} = AB \cdot \sin \hat{MAB} \Rightarrow MB \cdot \sin 135^\circ = 4 \times \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow MB \times \frac{1}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MB = 4\sqrt{2}$$

$$\Delta MHB : MH^2 + HB^2 = MB^2 \Rightarrow x^2 + (4 + x)^2 = (4\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 16 + 8x = 32$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow a \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b(0) = \sqrt{3} \Rightarrow a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + b \sin \frac{2\pi}{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow 0 + b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 0$$

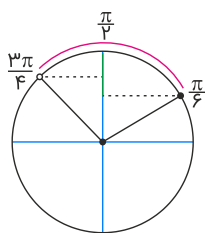
$$\Rightarrow f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{5\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

ابتدا از روی محدوده x ، محدوده $2x$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2x < \frac{3\pi}{4}$$

برای راحتی فرض می‌کنیم: $2x = \alpha$

باتوجه به دایره مثلثاتی زیر، مشخص است که وقتی $\frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ، مقدار $\sin \alpha$ از $\frac{1}{2}$ شروع شده و با افزایش کمان به سمت $\frac{\pi}{2}$ ، مقدار آن بزرگ‌تر شده و نهایتاً در $x = \frac{\pi}{4}$ به بیشترین مقدار خود یعنی ۱ می‌رسد، پس از آن وقتی از $x = \frac{\pi}{4}$ به سمت $x = \frac{3\pi}{8}$ حرکت می‌کند، مقدار آن کمتر شده و بخشی از مسیر طی‌شده روی محور $\sin$ ها را برمی‌گردد تا به $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برسد، بنابراین:



$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{3\pi}{4} &\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - 2b \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{-1}{2} \leq -2b \leq 0 \xrightarrow[\text{جهت عوض می شود}]{\text{تقسیم طرفین نامساوی بر } (-2)} \frac{1}{4} \geq b \geq 0 \end{aligned}$$

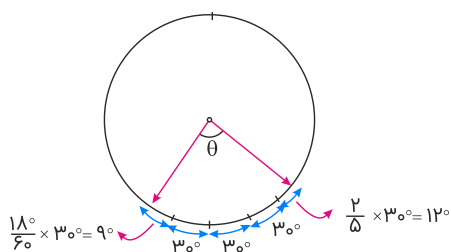
این بازه شامل فقط یک عدد صحیح $b = 0$ است.

عبارت را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \cot^2(54^\circ - 3^\circ) \tan(36^\circ - 6^\circ) + \lambda \sin^2(36^\circ + 135^\circ) \cos(54^\circ + 3^\circ) \\ &= \cot^2(3^\circ) \tan(-6^\circ) + \lambda \sin^2(135^\circ) (-\cos 3^\circ) \\ &= (\sqrt{3})^2 \times (-\sqrt{3}) + \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -5\sqrt{3} \end{aligned}$$

روش اول:

ساعت ۱۸' : ۷ را رسم می کنیم:



طی ۱۲ ساعت، عقربه ساعت شمار یک دور یعنی 360° درجه می چرخد؛ پس هر ساعت، 30° درجه دوران می کند.

با گذشت ۱۸ دقیقه، عقربه ساعت شمار $30^\circ \times \frac{18}{60}$ به جلو می رود، یعنی 9° ؛ پس زاویه بین عقربه ها θ برابر است با:

$$\theta = 9^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 12^\circ = 111^\circ$$

111° را به رادیان تبدیل می کنیم:

$$111^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{37\pi}{60}$$

روش دوم:

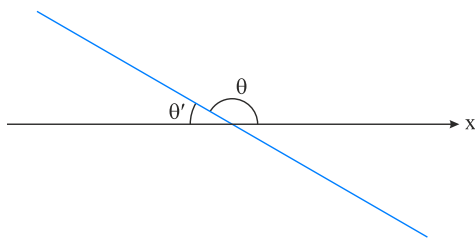
نکته: برای محاسبه زاویه بین عقربه های ساعت از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\text{زاویه} = 5/5 \times \text{دقیقه} - 30 \times \text{ساعت}$$

$$\text{زاویه} = 7 \times 30 - 18 \times 5/5 = 111^\circ$$

111° را به رادیان تبدیل می کنیم:

$$111^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{37\pi}{60}$$

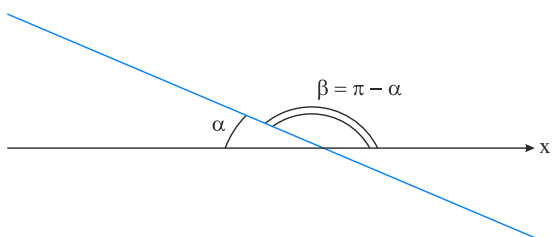


چون زاویه خط گذرنده از نقاط $A(4, k)$ و $B(-12, 10)$ با جهت منفی محور x ها، زاویه α است، پس برای تعیین مقدار k ، کافی است شیب خط AB را از دو طریق مختلف محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم. داریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10 - k}{-12 - 4} = \frac{k - 10}{16}$$

پس:

$$m_{AB} = \tan \beta = \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

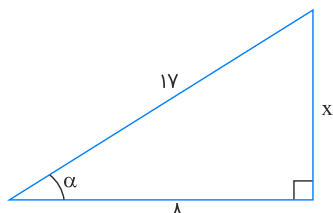


حال با معلوم بودن $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ ، مقدار $\tan \alpha$ را به دست می آوریم. داریم:

$$\tan \alpha = \frac{15}{8} \Rightarrow m_{AB} = -\tan \alpha = -\frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{k - 10}{16} = \frac{-15}{8} \Rightarrow k - 10 = -30 \Rightarrow k = -20$$

تذکر: اعداد ۸، ۱۵، ۱۷ را به عنوان اعداد فیثاغورسی در ذهن نگه دارید.



طبق رابطه فیثاغورس $\rightarrow x = 15$

مقدار عددی هر ۴ نسبت مثلثاتی را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sin \frac{3\lambda\pi}{3} &= \sin \left(12\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{29\pi}{6} &= \tan \left(5\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \cos \frac{14\pi}{3} &= \cos \left(4\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2} \\ \sin \frac{11\pi}{2} &= \sin \left(6\pi - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1\end{aligned}$$

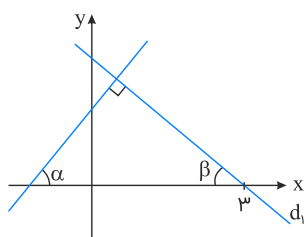
پس:

$$\begin{aligned}20\sqrt{3} \sin \frac{3\lambda\pi}{3} + 6\sqrt{3} \tan \frac{29\pi}{6} &= x \cos \frac{14\pi}{3} + 4 \sin \frac{11\pi}{2} \\ \Rightarrow 20\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 6\sqrt{3} \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \right) &= x \left(\frac{-1}{2} \right) + 4(-1) \\ \Rightarrow 30 - 6 = \frac{-x}{2} - 4 \Rightarrow \frac{x}{2} &= -28 \Rightarrow x = -56\end{aligned}$$

عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sin(90^\circ - 20^\circ) + 2 \sin 20^\circ}{\sin(90^\circ + 20^\circ) - 3 \sin(180^\circ - 20^\circ)} = \frac{\cos 20^\circ + 2 \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 3 \sin 20^\circ} \\ &= \frac{\frac{\cos 20^\circ + 2 \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{\frac{\cos 20^\circ - 3 \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}} = \frac{1 + 2 \tan 20^\circ}{1 - 3 \tan 20^\circ} = \frac{1 + 2a}{1 - 3a}\end{aligned}$$

زاویه‌های α و β متمم هستند، پس اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد، $\cos \beta = \frac{3}{5}$ است، بنابراین $\tan \beta = \frac{4}{3}$ خواهد بود.



پس شیب خط d_1 برابر $-\tan \beta = -\frac{4}{3}$ می‌شود. خط d_1 از نقطه $(3, 0)$ می‌گذرد. معادله آن را می‌نویسیم:

$$y - 0 = \frac{-4}{3}(x - 3) \Rightarrow (x = 0) \text{ محل برخورد با محور } y \Rightarrow y = \frac{-4}{3}(-3) = 4$$

در صورت، به جای $x - \frac{3\pi}{10}$ ، می‌نویسیم $(\frac{\pi}{5} + x) - \frac{\pi}{2}$:

$$\cos^2(\frac{\pi}{5} + x) + \cos^2(\frac{3\pi}{10} - x) = \cos^2(\frac{\pi}{5} + x) + \cos^2(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{5} + x))$$

:

$$= \cos^2(\frac{\pi}{5} + x) + \sin^2(\frac{\pi}{5} + x) = 1$$

در مخرج به جای $x + \frac{7\pi}{10}$ ، می‌نویسیم $(\frac{\pi}{5} + x) + \frac{\pi}{2}$:

$$\cot(\frac{\pi}{5} + x) \times \cot(\frac{7\pi}{10} + x) = \cot(\frac{\pi}{5} + x) \times \cot(\frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{5} + x))$$

$$= \cot(\frac{\pi}{5} + x) \times -\tan(\frac{\pi}{5} + x) = -1$$

$$\text{حاصل کسر} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(\sec^2 x - \cot x) \sqrt{\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x}}} = \sqrt{(\sec^2 x - \cot x) \sqrt{\frac{1}{\frac{\cos^2 x}{1}}}} \\
& = \sqrt{(\sec^2 x - \cot x) \sqrt{\tan^2 x}} = \sqrt{(\sec^2 x - \cot x) \underbrace{|\tan x|}_{\text{منفی}}} \\
& = \sqrt{(\sec^2 x - \cot x)(-\tan x)} = \sqrt{-\sec^2 x \sin x \cos x + 1} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} \\
& = \underbrace{|\sin x - \cos x|}_{\text{مثبت}} = \sin x - \cos x
\end{aligned}$$

توجه: در ربع دوم تانژانت منفی، سینوس مثبت و کسینوس منفی است.