



گزینه ۱

۱

به فرمول های $\sin 2\alpha$ توجه کنید:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = -2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\frac{-\sin \alpha = \sin(-\alpha)}{\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2x = 2k\pi - 2x \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 2k\pi \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = 2k\pi + \pi - (-2x) \Rightarrow -4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div(-4)} x = \frac{-k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: چون $k \in \mathbb{Z}$ است پس $-k$ را همان k در نظر می‌گیریم.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گزینه ۳

۲

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطه $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = 1 + a \sin bx \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$$

باتوجه به نمودار داده شده، ماکزیمم تابع $\frac{3}{2}$ ، مینیمم تابع $\frac{1}{2}$ و دوره تناوب π است. پس:

$$\begin{cases} 1 + \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{3}{2} \\ 1 - \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

باتوجه به اینکه تابع داده شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{2}$ و $2b$ باید هم علامت باشند. پس مسئله دو دسته جواب

$$\text{دارد، در نتیجه } \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ صحیح است.}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = \frac{3}{2} \xrightarrow[b < 0]{\text{باتوجه به نمودار}} a - b = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) : f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{1}{2}b = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{3}{2} \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارت داده شده را خلاصه کرده و سپس با استفاده از فرمول کمان های 2α ، حاصل تست را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha) &= \cos \alpha (-\sin \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha = \\ -\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha &= -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin 2\alpha \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

با استفاده از رابطه $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ معادله مثلثاتی را ساده می کنیم و جواب کلی معادله مثلثاتی را به دست می آوریم.

$$\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0 \Rightarrow \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi \\ \cos x = -2 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) = 1$$

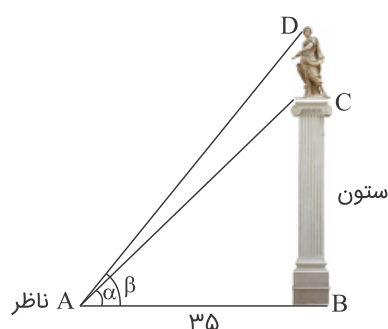
باتوجه به اینکه $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ است، داریم:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) \\ &= 2 \cos\left(x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{\lambda}\right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow x - \frac{3\pi}{\lambda} &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{\lambda} \pm \frac{\pi}{3} \\ \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x &\in \left\{ \frac{3\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{3} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = \frac{3\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{\lambda}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

ابتدا مسئله را به مدل هندسی تبدیل می‌کنیم:



$$\alpha = 40^\circ, \quad \beta = 45^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{BD}{35} \xrightarrow{\beta=45^\circ} BD = 35 \times \tan 45^\circ = 35$$

$$\tan \alpha = \frac{BC}{35} \xrightarrow{\alpha=40^\circ} BC = 35 \times \tan 40^\circ = \frac{\lambda}{10} \times 35 = 28$$

بنابراین:

$$CD = BD - BC = 35 - 28 = 7$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

ظاهر سؤال ممکن است کمی سخت به نظر برسد، ولی با انجام تغییرات زیر حل آن بسیار ساده می شود:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

در اینجا نیازی به محاسبه جواب‌های کلی معادله مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصله داده شده، مشخص کنیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

برای یافتن ضابطه تابع $\text{fog}(x)$ یا همان $f(g(x))$ ، کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $g(x)$ را قرار دهیم.

$$\begin{aligned} \text{fog}(x) &= f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin^2 x \\ &= \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = \sin^2 x (-\cos^2 x) = -\sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

با توجه به فرمول $\sin 2x$ ، داریم:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

پس ضابطه تابع fog به صورت زیر درمی آید:

$$\text{fog}(x) = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

$$2 \cos(3x) = -2 - 5 \sin^2 x$$

اگر برد دو طرف تساوی را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$-2 \leq 2 \cos(3x) \leq 2, \quad -7 \leq -2 - 5 \sin^2 x \leq -2$$

پس دو طرف تساوی فقط به ازای -2 برقرار خواهد بود.

$$\begin{cases} 2 \cos(3x) = -2 \Rightarrow \cos(3x) = -1 \Rightarrow 3x = (2k-1)\pi \Rightarrow x = (2k-1)\frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ -2 - 5 \sin^2 x = -2 \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k'\pi, & k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های مشترک دو معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\{-\pi, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi\} \cap \{-\pi, 0, \pi\} = \{-\pi, \pi\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

طرفین تابع را در $\sin^2 x$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) \sin^2 x &= 32 \sin^2 x \cos^2 x \cos^2(2x) \cos^2(3x) \cos^2(4x) \cos^2(5x) \\ &= 16 \sin^2(2x) \cos^2(2x) \cos^2(3x) \cos^2(4x) \cos^2(5x) \\ &= 16 \sin^2(3x) \cos^2(3x) \cos^2(4x) \cos^2(5x) \\ &= \frac{1}{32} \sin^2(32x) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin^2(32x)}{32 \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin^2 \frac{32\pi}{12}}{32 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{32 \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} \\ \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\frac{3}{4}}{32 \times \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{8(2 - \sqrt{3})} = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ را به معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x = -\cos x$ تبدیل می‌کنیم.
ب) به جای $-\cos x$ عبارت $\cos(\pi - x)$ را قرار داده و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب کلی $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ هر دو جواب به دست آمده را شامل می‌شود.

گزینه ۳

۱۴

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۱

۱۵

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{b} + b\pi x\right) = a \cos b\pi x$$

ماکزیمم تابع برابر با ۲ است؛ بنابراین: $|a| = 2$
از طرفی $y(0) = 2$ پس:

$$y(0) = a \times \cos 0 = a \Rightarrow a = 2$$

همچنین نمودار تابع در بازهٔ $[-2/5, 3/5]$ سه بار تکرار شده است، در نتیجه:

$$3T = 3/5 - (-2/5) = 1 \Rightarrow T = 1/3$$

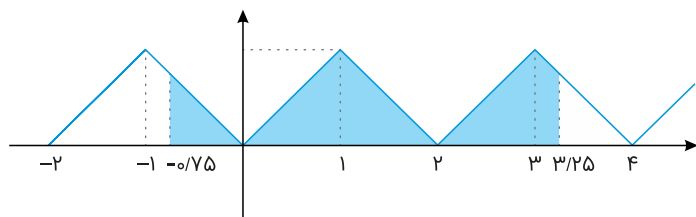
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1/3 \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

که هر دو مقدار قابل قبول است. با توجه به گزینه‌ها، $a.b = 2$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

نمودار تابع به صورت زیر خواهد بود:



$$S = 2 \times \frac{1 \times 2}{2} = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\tan\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

حاصل عبارت برابر است با:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

گام اول

می‌دانیم: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

گام دوم

باتوجه به گام اول، معادله را برحسب $\sin x$ نوشته و حل می‌کنیم. جواب معادله را با $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ مطابقت داده و مقادیر i را مشخص می‌کنیم.

$$\cos 2x = \sin x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \end{cases}$$

باتوجه به جواب‌های به‌دست‌آمده مقادیر i برابر است با:

$$i = \{1, 5, 9\}$$

دوره تناوب تابع به معادله $y = a \sin(bx) + c$ برابر است با $\frac{2\pi}{|b|}$ ، پس:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \quad (*)$$

همچنین باتوجه به نمودار $T = 6$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \quad (۱)$$

با فرض $b = \frac{1}{3}$ و اگر a عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادله $y = a \sin(bx) + c$ برابر با $a + c$ است، پس:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow \text{Max}(y) = a \quad (**)$$

همچنین باتوجه به نمودار $\text{Max}(y) = 2$ ، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = 2 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{7}{3}$ نیز قابل قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۴

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{غقق} \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

$$\begin{aligned} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) &= \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) \\ &= \frac{\frac{\tan x}{1}}{\frac{1}{|\cos x|}} \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times |\cos x| \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} \end{aligned}$$

اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد آنگاه $\cos x < 0$ است، پس $|\cos x| = -\cos x$ است. بنابراین:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \times (-\cos x) \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 0} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

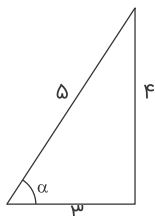
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$\sin\left(\frac{9\pi}{\gamma} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\gamma} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{\gamma} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{\gamma}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{\gamma} - \alpha\right) = -\cot \alpha$$

اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan \alpha = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل : } \cos \alpha (-\sin \alpha) - (-\cot \alpha) &= -\frac{3}{5} \left(-\frac{4}{5} \right) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned}\sin^6 x - \cos^6 x &= (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^4 x + \cos^4 x)}_1 \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از فرمول کمان‌های 2α داریم:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$$

بنابراین معادلهٔ مثلثاتی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$2 \sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

حالا جواب‌های معادله را در بازهٔ $[0, \pi]$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x = \frac{7\pi}{12}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x = \pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$

بنابراین مجموع تمام جواب‌های معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi + \frac{18\pi}{12} = 2\pi + \frac{6\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

گام اول

الف) دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

ب) به ازای هر مقدار دلخواه x و a همواره داریم: $-1 \leq \sin ax \leq 1$

گام دوم

تابع $y = a \sin(b\pi x)$ در بازه $[0, 3]$ سه نوسان کامل انجام داده است؛ بنابراین طول این بازه سه برابر دوره تناوب تابع است، پس:

$$3T = 3 - 0 \Rightarrow 3T = 3 \Rightarrow T = 1$$

بنابراین طبق قسمت الف) از گام اول، داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} \Rightarrow 1 = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

باتوجه به قسمت ب) از گام اول، داریم:

$$-1 \leq \sin(b\pi x) \leq 1 \Rightarrow -a \leq a \sin(b\pi x) \leq a \Rightarrow -a \leq y \leq a$$

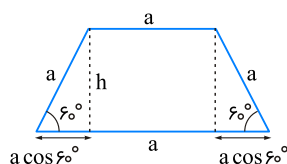
طبق نمودار تابع $y_{\max} = 3$ و $y_{\min} = -3$ و نمودار تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است بنابراین $a = -3$ خواهد بود. از طرفی، به ازای مقادیر کوچک بزرگ‌تر از صفر، حاصل تابع باید منفی شود و چون $a = -3$ شد پس مقدار $\sin b\pi x$ باید مثبت باشد؛ بنابراین داریم: $b = 2$

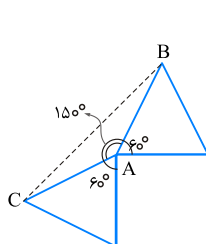
در نتیجه:

$$ab = (-3) \times 2 = -6$$

$$(محیط) P = 3a + 2a \cos 60^\circ + a \Rightarrow 30 = 5a \Rightarrow a = 6$$

$$S = \frac{(a + 2a)h}{2} = \frac{3a \times a \sin 60^\circ}{2} \xrightarrow{a=6} S = \frac{3\sqrt{3} \times 6^2}{4} = 27\sqrt{3}$$





$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^4 x + \cos^4 x)}_1 = \sin^2 x - \cos^2 x$$

ب) با دانستن رابطهٔ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ و $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$$

$$\sin^6 x - \cos^6 x = -\cos 2x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}} -\cos 2x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

گام اول

الف) تابع در بازه بین $\frac{\pi}{18}$ و $\frac{13\pi}{18}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.
 ب) دوره تناوب تابع $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.
 ج) داریم:

$$y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) = a + 2 \sin bx$$

باتوجه به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینه نمودار رسم شده خواهد بود.
 د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{18}, 0\right)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3}$$

همچنین باتوجه به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \xrightarrow{b>0} b = 3$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$0 = a - 2 \cos\left(3 \times \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{2}\right) = a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = a + 2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -1 + 3 = 2$$

در فرض تست مقدار $\tan ۲۰^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویه ۲۰° می‌نویسیم. عبارت نهایی را برحسب $\tan ۲۰^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ} = \frac{\sin(۲۷۰^\circ - ۲۰^\circ) + \sin(۷۲۰^\circ - ۲۰^\circ)}{\cos(۵۴۰^\circ + ۲۰^\circ) - \cos(۹۰^\circ + ۲۰^\circ)} \\ &= \frac{-\cos ۲۰^\circ + \sin(-۲۰^\circ)}{\cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) - (-\sin ۲۰^\circ)} = \frac{-\cos ۲۰^\circ - \sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ + \sin ۲۰^\circ} \\ \xrightarrow{\div \cos ۲۰^\circ} A &= \frac{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} - \frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} + \frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}} = \frac{-۱ - \tan ۲۰^\circ}{-۱ + \tan ۲۰^\circ} = \frac{-۱ - ۰/۴}{-۱ + ۰/۴} = \frac{-۱/۴}{-۰/۶} = \frac{۷}{۳} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

$$\begin{aligned} \sin\left(۲x - \frac{\pi}{۴}\right) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow \sin\left(۲x - \frac{\pi}{۴}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - \left(x + \frac{\pi}{۴}\right)\right) \\ \Rightarrow \sin\left(۲x - \frac{\pi}{۴}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{۴} - x\right) \end{aligned}$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} + x \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \quad (x \neq k\pi \text{ زیرا غیرقابل قبول}) \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

برای ساده تر شدن معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x, \sin(\pi + x) = -\sin x$$

اگر در حل معادلهٔ مثلثاتی دو نسبت مثلثاتی متفاوت داشتیم، آن ها را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطهٔ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ بازنویسی می کنیم.

$$\begin{aligned} 2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) &= 0 \\ \Rightarrow 2 \sin x \sin x + 3 \cot x (-\sin x) &= 0 \\ \Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x &= 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \\ \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x - 3 \cos x &= 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -2 \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

کمترین مقدار تابع ۱- است؛ پس:

$$1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2$$

تابع در دو دورهٔ تناوب رسم شده است، پس:

$$\begin{aligned} 2T &= \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \\ \frac{2\pi}{|b\pi|} &= \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3 \end{aligned}$$

باتوجه به نمودار a و b هم علامت است؛ پس:

$$a + b = 5 \text{ یا } -5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

ماکزیمم برابر ۴ است.

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0, \quad f(2) = 4 \Rightarrow a + b \cos \pi = 4 \Rightarrow a - b = 4$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

گام اول

الف) وقتی تعداد نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور x ها خواسته شده است، درواقع باید تعداد ریشه‌های معادله $y = 0$ را تعیین کنیم. پس باید تعداد ریشه‌های معادله $y = 0$ را در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ به دست آوریم.

ب) معادله $\sin \alpha = 0$ یک معادله خاص بوده و در آن $\alpha = k\pi$ است.

ج) مقادیر k را به نحوی تعیین می‌کنیم که ریشه‌های معادله حتماً در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ قرار بگیرند.

گام دوم

$$y = 0 \Rightarrow 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \xrightarrow[\alpha = k\pi]{\sin \alpha = 0} \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}$$

توجه داشته باشید که به ازای $k \geq 3$ یا $k \leq -3$ مقادیری که برای x به دست می‌آید در بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ نیست. پس پنج مقدار برای x به دست آمده و نمودار تابع در پنج نقطه محور x ها را قطع می‌کند.

گام اول

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \text{ می‌دانیم:}$$

گام دوم

باتوجه به گام اول و باتوجه به اینکه $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ است عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\lambda \cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \lambda \cos a \cos b \sin a \sin b$$

$$= 2(2 \sin a \cos a)(2 \sin b \cos b) = 2 \sin 2a \sin 2b$$

داریم:

$$a + b = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} 2a + 2b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2b = \frac{\pi}{2} - 2a$$

بنابراین:

$$\sin 2b = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = \cos 2a$$

پس می‌توان نوشت:

$$2 \sin 2a \sin 2b = 2 \sin 2a \cos 2a = \sin 2(2a) = \sin 4a$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(3\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta}$$

باتوجه به اینکه مقدار $\tan \theta$ در صورت سؤال داده شده است، صورت و مخرج کسر را بر $\cos \theta$ تقسیم می‌کنیم تا کسر داده شده برحسب $\tan \theta$ به دست آید.

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{0/2 + 1}{2(0/2)} = \frac{1/2}{0/4} = 2$$

گام اول

با استفاده از رابطه $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ معادلهٔ مثلثاتی داده شده را به یک معادلهٔ مثلثاتی برحسب $\sin x$ تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$3\sin^2 x - 5\sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow 3\sin^2 x - 5\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 3\sin^2 x - 5\sin^2 x + 1 = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = t} 3t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$t = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$(1) \cup (2) : x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\alpha = \arcsin \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}$$

با توجه به رابطه $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ معادله را ساده می‌کنیم. هم چنین می‌دانیم $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ است.

$$2 \tan x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \times \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\cos x \neq 0} 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow{\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

در این گونه سؤال ها ابتدا تمام نسبت های مثلثاتی را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با توجه به رابطه $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، معادله مثلثاتی را برحسب $\cos x$ مرتب می کنیم.

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x &= 3 \cos x \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \\ \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x &= 3 \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \\ \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

غ.ق.ق. ۲

معادله $\cos x = \cos \alpha$ دارای جواب $x = 2k\pi \pm \alpha$ است. هم چنین توجه کنید که معادله $\cos x = A$ به ازای $A > 1$ و $A < -1$ فاقد جواب است.

پس جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos x = \frac{1}{2}$ برابر است با:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه به نمودار رسم شده مشخص است دوره تناوب تابع برابر با 4π است. دوره تناوب تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|m|}$ به دست می آید.

گام دوم

$$\frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

با فرض $m = \frac{1}{2}$ تست را حل می کنیم (اگر $m = -\frac{1}{2}$ هم فرض شود تأثیری در جواب تست ندارد).

$$\begin{aligned} m = \frac{1}{2} \Rightarrow y &= \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \Rightarrow f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

دوره تناوب تابع برابر π و ماکزیمم مقدار آن $1/5$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \quad (I)$$

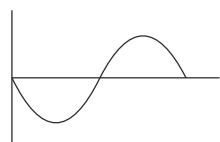
$$1 + |a| = 1/5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{5} \quad (II)$$

از طرفی عرض نقطه تماس نمودار با محور y ها بزرگتر از یک است.

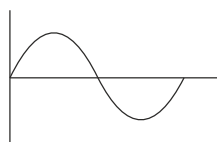
$$x = 0 : y = 1 + a \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 1 - \frac{a}{2} > 1 \Rightarrow \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a < 0 \xrightarrow{(II)} a = -\frac{1}{5}$$

باتوجه به اینکه ضریب $\sin$ در تابع منفی است و باتوجه به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b = 2$ قابل قبول است.

$$a + b = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$



نمودار $y = -\sin x$



نمودار $y = -\sin(-x)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

$$\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$$

برای آنکه کسر صفر شود باید صورت آن صفر باشد.

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} & \checkmark \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-2x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi & \times \end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $x = 2k\pi + \pi$ مخرج یعنی $1 + \cos x$ صفر می‌شود؛ بنابراین جواب کلی همان $x = \frac{2k\pi}{5}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

نکته:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{4} + x)} = 1 \xrightarrow{\cos(\frac{3\pi}{4} + x) = \sin x} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi & \text{غقق} \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون $\sin x \neq 0$ ، بنابراین جواب $x = k\pi$ غیرقابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

راه حل اول:

ابتدا حاصل $1 + \cot^2 \theta$ و $1 + \tan^2 \theta$ را بر حسب $\sin \theta$ و $\cos \theta$ به دست می‌آوریم:

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

می‌دانیم $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ و $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ است پس:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{1}{(\cos \theta \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

بنابراین:

$$\frac{1}{(\cos \theta \sin \theta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 2\theta} = 4 \sin^{-2} 2\theta$$

راه حل دوم: (عددگذاری)

در صورتی که $\theta = \frac{\pi}{4}$ در نظر بگیریم، داریم:

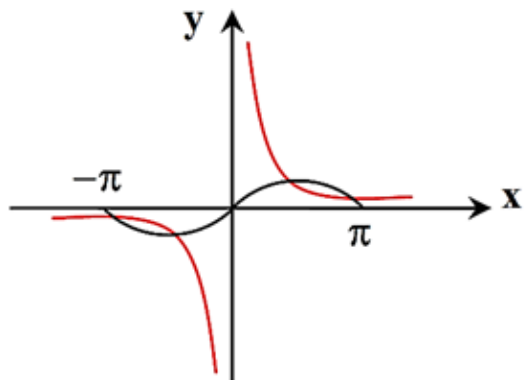
$$\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{(1 + (\tan \frac{\pi}{4})^2)(1 + (\cot \frac{\pi}{4})^2)}{1 - \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{(1+1)(1+1)}{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 16$$

با جایگذاری $\theta = \frac{\pi}{4}$ در گزینه‌ها، نتیجه می‌گیریم که تنها در گزینه "۴" صدق می‌کند:

$$4 \sin^{-2} 2\theta = 4 \left(\sin \left(2 \times \frac{\pi}{4} \right) \right)^{-2} = 16$$

$$x \sin x - 1 = 0 \Rightarrow x \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{x}$$

کافی است تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{x}$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست بیاوریم. برای این منظور هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



باتوجه به شکل، واضح است که معادله داده شده در بازه $[-\pi, \pi]$ دارای ۴ ریشه حقیقی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۵

گام اول

با توجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan 15^\circ$ داده شده است، سعی می کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویه 15° به دست آوریم.

گام دوم

$$A = \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(540^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)}$$

$$= \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + 15^\circ) - \sin(\frac{3\pi}{2} - 15^\circ)}{\sin(\pi - 15^\circ) - \sin(\frac{\pi}{2} + 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

برای این که در کسر داده شده $\tan 15^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می کنیم. بنابراین داریم:

$$A = \frac{\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{1/28}{-0/72} = -\frac{128}{72} = -\frac{16}{9}$$

به کمک رابطه $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ زیر تبدیل می شود:

$$64\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha = 1$$

حال طرفین رابطه را در $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ضرب می کنیم:

$$64\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$16\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$4\sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 4\alpha = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 4\alpha = k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{7} \\ \alpha = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

فقط توجه داشته باشید که $k\pi$ ها قابل قبول نیستند.

در بازه $[0, 2\pi]$ تعداد جواب های $\alpha = \frac{2k\pi}{9}$ برابر ۶ تا و تعداد جواب های $\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ برابر ۸ است. معادله مجموعاً ۱۴ ریشه دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

برای حل سؤال به دو رابطه زیر توجه کنید:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

جواب کلی که هر دو جواب $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k\pi}{3}$ را شامل شود به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

ابتدا معادله مثلثاتی را به حالت استاندارد $f(x) = 0$ تبدیل و جواب‌ها را در بازه $[0, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{cases}$$

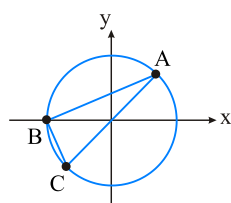
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, x = \pi, x = 2\pi$$

$$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$$

به ازای $x = 0$ و $x = 2\pi$ عبارت $1 - \cos x$ برابر صفر است پس کسر تعریف نشده خواهد بود.

مجموعه جواب‌های $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\widehat{AC} = \pi \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$



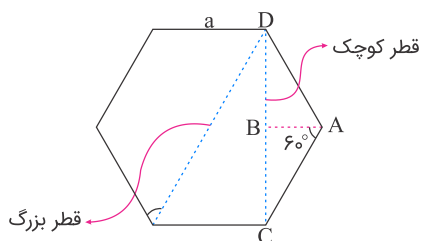
بنابراین مثلث $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = 6 \times \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 9\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = 2BC = 2AC \sin 60^\circ = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{3}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $2a$ است.

پ) مساحت آن $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ است.

دوره تناوب را باتوجه به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi$$

$$\Rightarrow T = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x = 0$ نزولی است، بنابراین $a, b < 0$ پس داریم:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

می‌دانیم:

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \sin(\pi + x) = -\sin x$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، معادله را ساده کرده سپس حل می‌کنیم:

$$\sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = \frac{1}{2} - \cos x \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cos x \sin x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

داریم:

$$1 + \cot^2 C = 1 + \frac{\cos^2 C}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2 C + \cos^2 C}{\sin^2 C} = \frac{1}{\sin^2 C} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 C}$$

$$\Rightarrow \sin^2 C = \frac{4}{9} \xrightarrow{C < 90^\circ} \sin C = \frac{2}{3}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{96} \Rightarrow AH = \frac{96 \times 2}{3} = 64$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

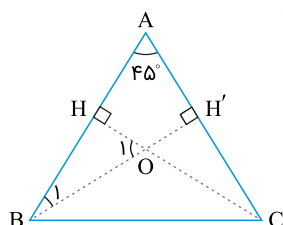
$$A = \sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right)$$

$$= \frac{1}{|\cos x|} \left(2 \times \frac{1}{2} - \sin^2 x \right) = \frac{1 - \sin^2 x}{|\cos x|} = \frac{\cos^2 x}{|\cos x|}$$

چون $\frac{3\pi}{2} < x < \pi$ است، یعنی x در ناحیه سوم قرار دارد و در نتیجه $|\cos x| = -\cos x$ است. پس:

$$A = \frac{\cos^2 x}{-\cos x} = -\cos x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

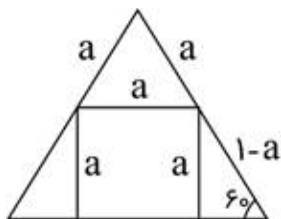


$$\hat{A} = 45^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{B}_1 = 45$$

$$\Delta AHC : AH = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow HB = HO = \lambda - 4\sqrt{2}$$

$$S_{OHB} = \frac{1}{2} (\lambda - 4\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times 16 (2 - \sqrt{2})^2 = 8 (6 - 4\sqrt{2}) = 16 (3 - 2\sqrt{2}) = \frac{16}{3 + 2\sqrt{2}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a}{1-a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2a = \sqrt{3} - \sqrt{3}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow a = 2\sqrt{3} - 3$$

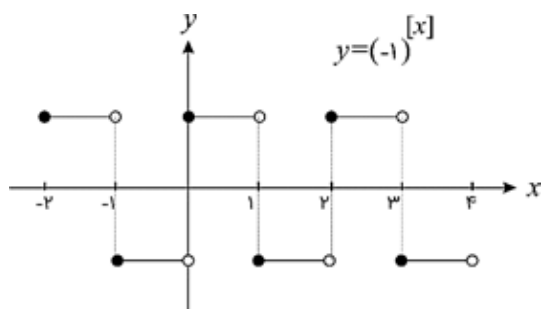
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

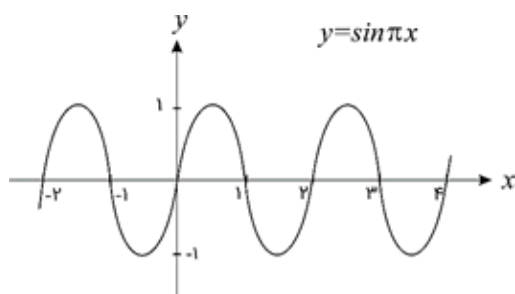
الف) می‌دانیم به ازای هر x دلخواه $|f(x)| \geq 0$ است.
 ب) $xy \geq 0$ همواره برقرار است هرگاه، x و y در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشد.

گام دوم

باتوجه به گام اول، نامساوی $(-1)^{[x]} f(x) \geq 0$ زمانی برقرار است که دو تابع $y = f(x)$ و $y = (-1)^{[x]}$ در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشند. ابتدا نمودار تابع $y = (-1)^{[x]}$ را رسم می‌کنیم:

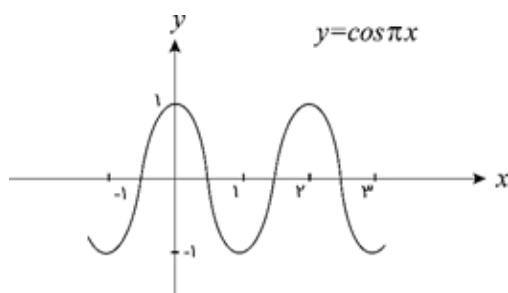


اکنون با رسم نمودار هریک از گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدام‌یک از آن‌ها در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است.
 گزینه ۱:

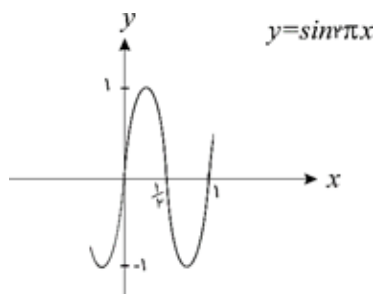


همان‌طور که مشاهده می‌شود، این تابع در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است، پس این گزینه جواب سؤال خواهد بود.

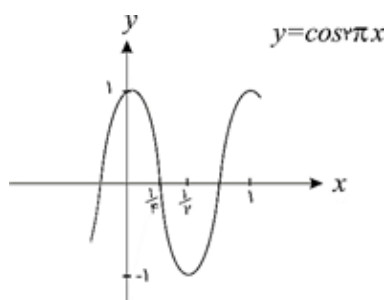
گزینه ۲:



باتوجه به نمودار فوق، این تابع در بازه‌های زیادی از جمله در بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت نیست.
 گزینه ۳:



مقدار تابع در بازه $(\frac{1}{4}, 1)$ منفی است درحالی که تابع $y = (-1)^{[x]}$ در این بازه دارای علامت مثبت است.
گزینه ۴:



با مقایسه نمودار بالا با نمودار تابع $y = (-1)^{[x]}$ ، این گزینه هم جواب سؤال نیست.

گزینه ۳

۶۰

$$4 \sin(3x) \cos(3x) = 1 \Rightarrow 2 \sin(3x) \cos(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(6x) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{36} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{36} \end{cases} \\ 6x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{36} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین معادله چهار جواب دارد.

$\cos \alpha = \frac{2}{3}$ و α در ناحیه چهارم است:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\frac{2 - \sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$2 \sin x \cos 2x + \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x(1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 1$$

$$\Rightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 1 \Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6} \right\}$$

مجموع جواب‌ها $\frac{15\pi}{6}$ یعنی $\frac{5\pi}{2}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$2 \cos 2x = \cot x(2 \sin x + \tan x) \Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 2 \cot x \sin x + \cot x \tan x$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 x - 2 = 2 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4 + \sqrt{64}}{4} = \frac{4 + 8}{4} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{1} \text{ غ.ق.ق} \\ \cos x = \frac{4 - \sqrt{64}}{4} = \frac{4 - 8}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

در $x = 0$ ، مقدار تابع برابر است با $y = 3$ ؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a = 3$. به سادگی نتیجه می‌شود که به ازای $x = \frac{25}{3}$ ، مقدار تابع برابر است با $y = 2/5$.

$$T = \frac{2\pi}{|\pi b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \checkmark, \quad b = \frac{1}{2} \times, \quad y = 3 + \sin\left(\frac{-\pi}{2}x\right)$$

$$\xrightarrow{x = \frac{25}{3}} y = 3 + \sin\left(\frac{-25}{6}\pi\right) \Rightarrow y = 3 + \sin\left(-4\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(\frac{14\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{14\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{15\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan\left(\frac{12\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin\left(\frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos\left(\frac{12\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = \tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2}$$

می‌دانیم:

گام دوم

با استفاده از فرمول‌های کمان 2α ، رابطه $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ را ساده کرده و مقدار خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -2 \end{aligned}$$

گزینه ۱

۶۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

تابع $\sqrt{\sin \pi x - 1}$ در صورتی تعریف شده است که $\sin \pi x - 1 \geq 0$ باشد و چون همواره $\sin \pi x \leq 1$ برقرار است پس باید $\sin \pi x = 1$ باشد. در این حالت $x = 2k + \frac{1}{2}$ می‌شود که یک عدد غیر صحیح است، بنابراین حاصل $[x] + [-x]$ برابر عدد -1 می‌شود.

گام دوم

حالا سراغ محاسبه مقدار $f(x)$ و هم چنین مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right)$ می‌رویم:

$$\begin{aligned} f(x) &= [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1} = -1 + 0 = -1 \\ f\left(-\frac{1}{2}f(x)\right) &= f\left(-\frac{1}{2}(-1)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[-\frac{1}{2}\right] + \sqrt{\sin \frac{\pi}{2} - 1} \\ &= 0 - 1 + \sqrt{1 - 1} = -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

اگر $x \in [-1, 1]$ ، آنگاه:

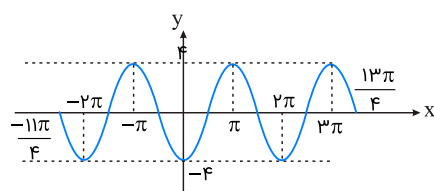
$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3\pi \leq -3\pi x \leq 3\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq \frac{\pi}{4} + 3\pi \Rightarrow \frac{-11\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - 3\pi x \leq \frac{13\pi}{4}$$

حال با در نظر گرفتن $\theta = \frac{\pi}{4} - 3\pi x$ ، ضابطه تابع مفروض سؤال، به صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -4 \cos \theta ; \quad \frac{-11\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{13\pi}{4}$$

که شکل آن به صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta = -\pi$ ، $\theta = \pi$ و $\theta = 3\pi$ ، بیشترین مقدار خود را دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

دوره تناوب را باتوجه به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -3, c = -1 \\ b = 3, c = -1 \end{cases}$$

فقط حالت $b = 3, c = -1$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینه ۱ صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\sin C = \frac{5}{13} \xrightarrow{\cos C > 0} \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\begin{cases} \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} \\ \tan C = \frac{AH}{CH} = \frac{AH}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{AH}{9} \Rightarrow AH = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} = 3.75$$

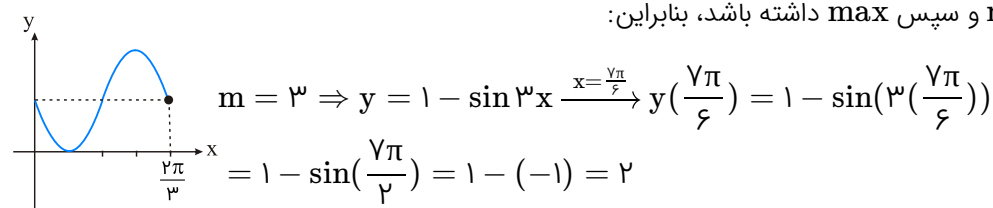
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ : طبق نمودار}$$

$$T = \frac{2\pi}{|m|} \text{ : از روی ضابطه}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = \omega \Rightarrow m = \pm \omega$$

چون باتوجه به نمودار تابع باید ابتدا min و سپس max داشته باشد، بنابراین:



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

گام اول

الف) با در نظر گرفتن $\cot \frac{x}{2} = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}}$ معادله را برحسب $\tan \frac{x}{2}$ به دست می‌آوریم. معادله به یک معادله درجه دو برحسب $\tan \frac{x}{2}$ تبدیل و با حل معادله درجه دو، حاصل $\tan \frac{x}{2}$ را تعیین می‌کنیم.

ب) با استفاده از فرمول کمان $\tan 2x$ ، ابتدا $\tan x$ و سپس $\tan 2x$ را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan^2 \frac{x}{2} - 1}{\tan \frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \tan^2 \frac{x}{2} - 1 = \tan \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

محاسبه $\tan x$:

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2(1 \pm \sqrt{5})^2}{1 - \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2} = -2$$

محاسبه $\tan 2x$:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a, b و c، اگر زاویه بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

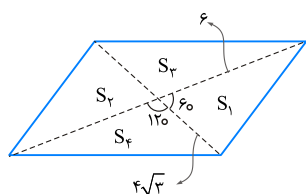
$$S = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \alpha$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$S_1 = S_r \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 18$$

$$S_3 = S_f \Rightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin(120^\circ) = 18$$

$$S_1 + S_r + S_3 + S_f = 4 \times 18 = 72$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

باتوجه به نمودار تابع $f(\pi) = -\frac{3}{2}$ است، پس:

$$-\frac{3}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow a + b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a - b\sqrt{3} = -3 \quad (1)$$

باتوجه به نمودار تابع $b > 0$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{3}$ است، پس:

$$a + |b| = \sqrt{3} \xrightarrow{b > 0} a + b = \sqrt{3} \quad (2)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-2 \begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = -2\sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} -b(2 + \sqrt{3}) = -(3 + 2\sqrt{3}) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$\begin{aligned}
& \tan(30^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(48^\circ) \sin(140^\circ) \\
&= \tan(360^\circ - 60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(360^\circ + 120^\circ) \sin(720^\circ + 120^\circ) \\
&= \tan(-60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) + \tan(180^\circ - 60^\circ) \sin(180^\circ - 60^\circ) \\
&= (-\tan(60^\circ))(-\cos(30^\circ)) + (-\tan(60^\circ)) \sin(60^\circ) \\
&= (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0
\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

می‌دانیم:

$$\begin{aligned}
(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
\Rightarrow 1 &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \\
\Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha
\end{aligned}$$

حال از رابطه $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$ کمک می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\sin^4 x + \cos^4 x &= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \\
\Rightarrow \sin 2x &= \pm 1 \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

جواب‌های موجود در بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها 4π است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a + b \cos x$$

باتوجه به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\begin{aligned}
\text{ماکزیمم} &= a + |b| = 3 \xrightarrow[b < 0]{\text{باتوجه به نمودار}} a - b = 3 \quad (1) \\
\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) : 0 &= a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = a + b \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = a + b\left(\frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow a + \frac{b}{2} &= 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (2) \\
\stackrel{(1),(2)}{\longrightarrow} \begin{cases} a - b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} &\xrightarrow{+} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -2
\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

برای حل معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر کمک می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) &= \cot x \\ \cos \frac{3\pi}{4} &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ (\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) &= \cos \frac{3\pi}{4} \\ (\sin x - \tan x) \cot x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} - 1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

جواب‌های معادلهٔ $\cos x = \cos \alpha$ از رابطهٔ $x = 2k\pi \pm \alpha$ به دست می‌آید.

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

$$\begin{aligned}4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) &= 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1 \\ \Rightarrow -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x &= 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{8} & (1) \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{8} & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{c|c|c} k & 1 & 2 \\ \hline x & \pi - \frac{\pi}{8} & 2\pi - \frac{\pi}{8} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{c|c|c} k & 0 & 1 \\ \hline x & \frac{5\pi}{8} & \pi + \frac{5\pi}{8} \end{array} \quad (2)$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi - \frac{\pi}{8} + 2\pi - \frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \pi + \frac{5\pi}{8} = 4\pi + \pi = 5\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

داریم:

$$\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

بنابراین $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$ پس:

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2 \cot(2\pi x)$$

دوره تناوب تابع $\tan(ax)$ و $\cot(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $\frac{\pi}{|2\pi|}$ است، یعنی $\frac{1}{2}$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از فرمول $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ عبارت داده شده را ساده کرده و معادله را حل می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

می‌دانیم $\tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ و $\sin(\frac{3\pi}{4} - x) = -\cos x$ است. از رابطه داده شده مقدار $\cos x$ را حساب کرده و با استفاده از فرمول $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ، حاصل $\cos 2x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حالا حاصل $\cos 2x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

مجموعه جواب‌های معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ است.

گام دوم

جواب‌های معادله مثلثاتی را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$2\cos^2 x + \cos x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

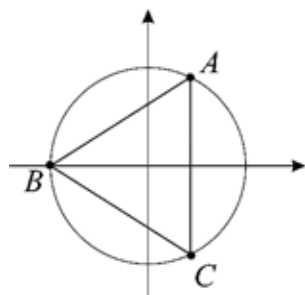
$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos \pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x_3 = \pi$$

جواب‌ها را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} = \widehat{BC} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$



بنابراین مثلث $\triangle ABC$ متساوی‌الاضلاع است.

$$\tan(285^\circ) = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot(15^\circ)$$

$$\tan(-165^\circ) = -\tan(165^\circ) = -\tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan(15^\circ)$$

$$\sin(1095^\circ) = \sin(1080^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos(255^\circ) = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin(15^\circ)$$

$$\tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ) = -\cot(15^\circ) \tan(15^\circ) + \sin^2(15^\circ)$$

$$= -1 + \sin^2(15^\circ) = -\cos^2(15^\circ)$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \sin^2 x + \sin^2 x &= 1 \Rightarrow \sin^2 x \sin^2 x = 1 - \sin^2 x \\
\Rightarrow (\sin^2 x \cos^2 x)(\sin^2 x \cos^2 x) &= \cos^2 x \\
\Rightarrow (\sin^2 x \cos^2 x)(\cos^2 x \cos^2 x) &= \cos^2 x \\
\Rightarrow (\cos^2 x)(\sin^2 x \cos^2 x - 1) &= 0 \\
\Rightarrow (\cos^2 x)(\sin^2 x(1 - \sin^2 x) - 1) &= 0 \\
\Rightarrow (\cos^2 x)(-\cos^2 x + \sin^2 x - 1) &= 0 \\
\Rightarrow (\cos^2 x)(-(\cos^2 x - 1)) &= 0 \\
\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} & (1) \\ \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases} \\
\stackrel{(1) \cup (2)}{\longrightarrow} x = (2k+1)\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \sin^2 x &= 1 - \sin^2 x \Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(-2x) - \cos 2x) = \cos^2 x \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 2x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow \cos 2x = -1 \\
\Rightarrow 2x = (2k+1)\pi \Rightarrow x &= (2k+1)\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

گام اول

داریم: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

گام دوم

با استفاده از رابطه گام اول، معادله مثلثاتی داده شده را بر حسب $\cos x$ مرتب می‌کنیم:

$$2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 2 - 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

چون $-1 \leq \cos x \leq 1$ است پس هر دو مقدار به دست آمده، قابل قبول است. باتوجه به آن‌ها جواب‌های معادله را در بازه $[\pi, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [\pi, 2\pi]} x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \cos \pi \Rightarrow x_2 = \pi$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3}$$

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a + b \sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{5\pi}{6}$ صفر است. پس:

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = a + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow b = 2a$$

بنابراین: $y = a + 2a \sin x$. به علاوه باتوجه به اینکه $y(0) > 0$ می‌باشد، پس $a > 0$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = 1$ باشد.

$$\max = 3 \Rightarrow a + 2a = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 + 2 \sin x$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$